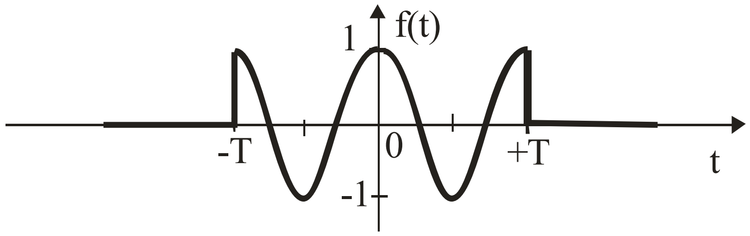
2004 BSAS Písemka 2	27.1.2005

1. Je dán signál $f\left(t\right)=e^{j\frac{2\pi}{T}t}\left[\sigma\left(t+a\right)-\sigma\left(t-a\right)\right] \quad t\in\left(-\infty,+\infty\right), T>0, a>0$. (**20b**)

a) Určete zda je signál periodický (**2b).**
b) Načrtněte průběh reálné části signálu pro $a=T$ (**3b).**
c) Určete jeho spektrum (**5b**) a načrtněte jeho průběh (**5b**).
d) Určete energii signálu (**5b**).

Řešení

a) Signál není periodický.
b) Průběh reálné části signálu jsou 2 periody funkce kosinus.

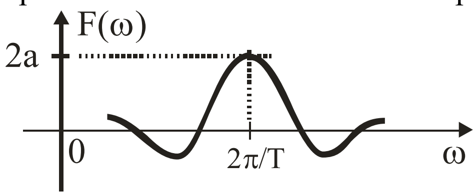


c)

$$F\left(\omega\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)e^{-j\omega t}dt=\int_{-a}^{+a} e^{j\frac{2\pi}{T}t}e^{-j\omega t}dt=\int_{-a}^{+a} e^{j\left(\frac{2\pi}{T}-\omega\right)t}dt=\left[\frac{e^{j\left(\frac{2\pi}{T}-\omega\right)t}}{j\left(\frac{2\pi}{T}-\omega\right)}\right]_{-a}^{+a}=$$

$$=\frac{1}{j\left(\frac{2\pi}{T}-\omega\right)}\left[e^{j\left(\frac{2\pi}{T}-\omega\right)a}-e^{-j\left(\frac{2\pi}{T}-\omega\right)a}\right]=2a\frac{\sin\left(\left(\frac{2\pi}{T}-\omega\right)a\right)}{\left(\frac{2\pi}{T}-\omega\right)a}=2a\frac{\sin\left(\left(\omega-\frac{2\pi}{T}\right)a\right)}{\left(\omega-\frac{2\pi}{T}\right)a}$$

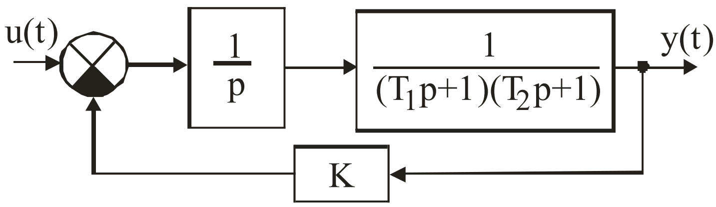
Spektrum má tvar funkce $\sin\omega/\omega$ posunuté doprava na hodnotu kmitočtu $\omega=2\pi/T$.



d) Energie signálu

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f\left(t\right)\right|^2 dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{j\frac{2\pi}{T}t}\left[\sigma\left(t+a\right)-\sigma\left(t-a\right)\right]\right|^2 dt=\int_{-a}^{+a}1dt=\left[t\right]_{-a}^{+a}=2a$$

2. Je dán spojitý lineární systém tak jak ukazuje obrázek kde $T_1 = 0,5, T_2 = 1$. (**20b**)



a) Načrtněte rozložení pólů a nul pro $K = 0$. (**3b)**

b) Napište diferenciální rovnici systému pro $K = 0$. (**2b**)

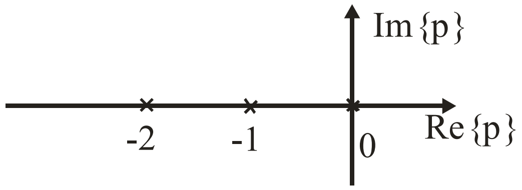
c) Načrtněte amplitudovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích pro $K = 0$ (**5b**). Vyznačte sklony asymptot (**1b**) a ocejchujte osy. (**1b**)

d) Určete velikost K pro kterou je systém stabilní.(**8b**)

Řešení

a) Jestliže je $K = 0$ potom zpětná vazba v systému není a systém má operátorový přenos

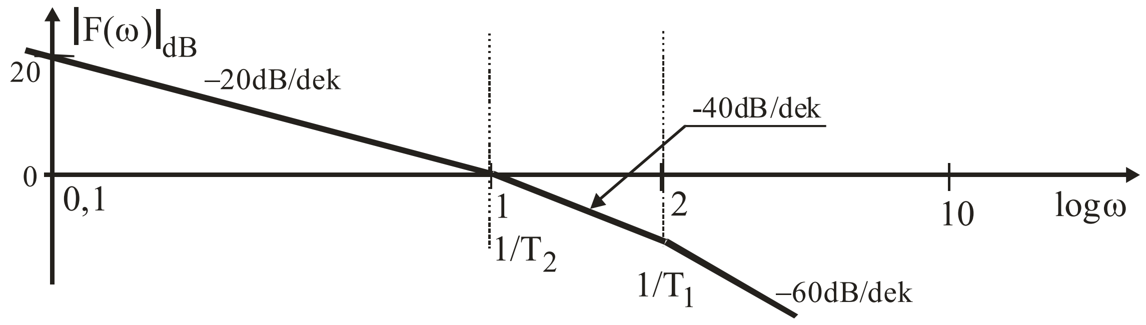
$F(p) = \dfrac{Y(p)}{U(p)} = \dfrac{1}{p(T_1 p+1)(T_2 p+1)}$ a jeho póly jsou $p_1 = 0,\ p_2 = -\dfrac{1}{T_1} = -2,\ p_3 = -\dfrac{1}{T_2} = -1$.



b) $Y(p)\left[p(0,5p+1)(p+1)\right] = U(p) \Rightarrow Y(p)\left[p^3 0,5 + p^2 1,5 + p\right] = U(p) \Rightarrow 0,5y''' + 1,5y'' + y' = u$

c) Určíme frekvenční přenos systému. Bude

$$F(j\omega) = \frac{1}{\omega\sqrt{T_1^2\omega^2+1}\sqrt{T_2^2\omega^2+1}} e^{j\left(-\frac{\pi}{2} - arctgT_1\omega - arctgT_2\omega\right)} = \frac{1}{\omega\sqrt{0,25\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+1}} e^{j\left(-\frac{\pi}{2} - arctg\,0,5\omega - arctg\omega\right)}$$



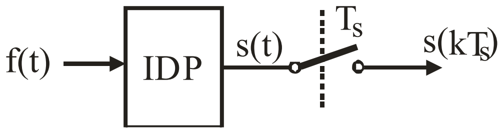
d) Na základě pravidel blokové algebry platí pro celkový přenos systému

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\dfrac{1}{p(0,5p+1)(p+1)}}{1 + \dfrac{K}{p(0,5p+1)(p+1)}} = \frac{1}{p(0,5p+1)(p+1)+K} = \frac{1}{p^3 0,5 + p^2 1,5 + p + K}$$

Sestavíme Hurwitzův determinant

$$\begin{vmatrix} 1,5 & K \\ 0,5 & 1 \end{vmatrix} = 1,5 - 0,5K > 0 \quad \Rightarrow \quad K < \frac{1,5}{0,5} = 3$$

3. Spojitý signál $f(t) = e^{j\frac{2\pi}{T}t}\left[\sigma(t+a) - \sigma(t-a)\right] \quad t \in (-\infty, +\infty), T > 0, a > 0$ prochází ideální dolní propustí (IDP) s frekvenčním přenosem $F_{IDP}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_0 \\ 0 & |\omega| \geq \omega_0 \end{cases}$. Na výstupu IDP je signál vzorkován se vzorkovací periodou T_s tak, jak ukazuje následující obrázek. (**15b**)



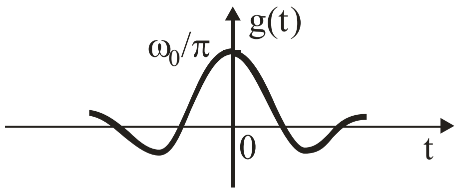
a) Vypočtěte impulsní charakteristiku $g(t)$ IDP (**5b**) a načrtněte ji (**5b**)

b) Je možno IDP realizovat? Zdůvodněte proč na základě průběhu $g(t)$ (**2b**).

c) Jaká musí být vzorkovací perioda T_s aby při zpětné rekonstrukci signálu $s(kT_s)$ nedošlo ke ztrátě informace?(**3b**).

Řešení

a) $g(t) = \mathscr{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{j\omega t} d\omega = \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{e^{j\omega t}}{jt}\right]_{-\omega_0}^{+\omega_0} = \dfrac{e^{+j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j\pi t} = \dfrac{\omega_0}{\pi}\dfrac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t}$



b) IDP nelze realizovat neboť to není kauzální systém (impulsní charakteristika $g(t)$ nabývá nenulových hodnot pro $t < 0$.

c) Vzhledem k tomu, že nejvyšší kmitočet ve spektru signálu $s(t)$ je ω_0 musí pro dobu vzorkování T_s platit $\dfrac{2\pi}{T_s} > 2\omega_0 \quad \Rightarrow \quad T_s < \dfrac{\pi}{\omega_0}$.

4. Diskrétní signál $g\left(k\right)=\begin{cases}0,5^k & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$ je vstupem diskrétního systému popsaného diferenční rovnicí $y\left(k\right)=y\left(k-1\right)+u\left(k\right)$. (**15b**)

a) Určete operátorový přenos diskrétního systému (**3b**).
b) Určete stabilitu tohoto diskrétního systému(**2b**)
c) Vypočtěte diskrétní signál na výstupu systému(**5b**) a načrtněte jej pro prvních 5 hodnot (**5b**)

Řešení

a) Platí

$$y\left(k\right)-y\left(k-1\right)=u\left(k\right)\quad\Rightarrow\quad Y\left(z\right)-z^{-1}Y\left(z\right)=U\left(z\right)\quad\Rightarrow\quad F\left(z\right)=\frac{Y\left(z\right)}{U\left(z\right)}=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

b) Systém má jediný pól, který leží na jednotkové kružnici, a proto je na mezi stability.

c) Pro obraz vstupního signálu platí $U\left(z\right)=\mathcal{Z}\left\{u\left(k\right)\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^k=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$.

Pro obraz výstupního signálu bude platit

$$Y\left(z\right)=F\left(z\right)U\left(z\right)=\frac{z}{z-1}\frac{z}{z-0,5}=\frac{z^2}{\left(z-1\right)\left(z-0,5\right)}=\frac{z^2}{z^2-1,5z+0,5}$$

Metoda 1: rozklad na parciální zlomky

$$Y\left(z\right)=\frac{z^2}{\left(z-1\right)\left(z-0,5\right)}=\frac{Az}{z-1}+\frac{Bz}{z-0,5}=\frac{Az^2-0,5A+Bz^2-B}{\left(z-1\right)\left(z-0,5\right)}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}A+B=1\\-0,5A-B=0\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}A=2\\B=-1\end{matrix}$$

$$Y\left(z\right)=\frac{2z}{z-1}-\frac{z}{z-0,5}=\frac{2}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-0,5z^{-1}}$$

$$y\left(k\right)=\mathcal{Z}^{-1}\left\{Y\left(z\right)\right\}=2\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-z^{-1}}\right\}-\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-0,5z^{-1}}\right\}=2-0,5^k$$

Metoda 2: dělení polynomu polynomem

čitatel			jmenovatel			podíl			
z^2	z^1	z^0	z^2	z^1	z^0	z^0	z^(-1)	z(-2)	z^(-3)
1	0	0	1	-1,5	0,5	1,000	1,500	1,750	1,875

1	-1,5	0,5			
0	1,5	-0,5			
	1,5	-2,25	0,75		
	0	1,75	-0,75		
		1,75	-2,625	0,875	
		0	1,875	-0,875	0
			1,875	-2,813	0,938

Metoda 3: dosazování do diferenční rovnice $y\left(k\right)=y\left(k-1\right)+u\left(k\right)$

$k=0\quad y\left(0\right)=y\left(-1\right)+u\left(0\right)=0+0,5^0=1$

$k=1\quad y\left(1\right)=y\left(0\right)+u\left(1\right)=1+0,5^1=1,5$

$k=2\quad y\left(2\right)=y\left(1\right)+u\left(2\right)=1,5+0,5^2=1,75$

$k=3\quad y\left(3\right)=y\left(2\right)+u\left(3\right)=1,75+0,5^3=1,75+0,125=1,875$

Metoda 4: Z diferenční rovnice je patrno, že diskrétní systém je sumátor. Na jeho výstupu je postupně součet vstupních vzorků. Proto (s využitím vztahu pro součet konečného počtu členů k geometrické posloupnosti $\sum_{l=0}^{k} a^k = \dfrac{1-a^{k+1}}{1-a}$) platí:

$$y(k) = \sum_{l=0}^{k} 0,5^l = \frac{1-0,5^{k+1}}{1-0,5} = 2\left(1-0,5^{k+1}\right) = 2-2.0,5^k.0,5 = 2-0,5^k$$