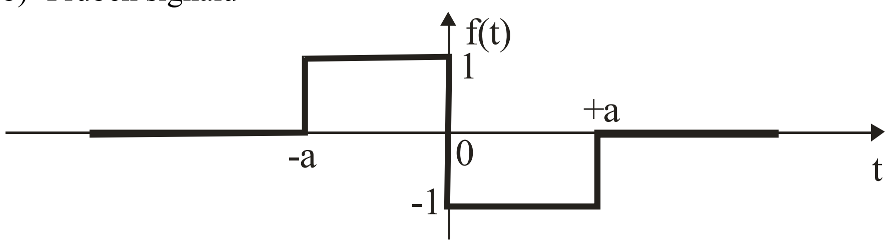
2004 BSAS Písemka 1	**Skupina A**

1. Je dán signál $f(t)=\sigma(t+a)-2\sigma(t)+\sigma(t-a) \quad t\in(-\infty,+\infty)$.

a) Určete zda je signál periodický (**2b).**
b) Načrtněte průběh signálu **(4b).**
c) Určete hodnotu spektra pro kmitočet $\omega=0$ (**3b**) a zdůvodněte výsledek (**2b**).
d) Určete energii signálu (**4b**).

Řešení

a) Signál není periodický.
b) Průběh signálu



c) $F(\omega)\big|_{\omega=0}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\Big|_{\omega=0}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt=\int\limits_{-a}^{0}(+1)\,dt+\int\limits_{0}^{+a}(-1)\,dt=[t]_{-a}^{0}-[t]_{0}^{+a}=a-a=0$

Hodnota spektra pro kmitočet $\omega=0$ vyjadřuje střední hodnotu (stejnosměrnou složku) signálu a ta je nulová (plochy signálu nad i pod osou jsou stejné).

d) $E=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|f(t)\right|^2 dt=\int\limits_{-a}^{+a}1dt=[t]_{-a}^{+a}=a+a=2a$

2. Spojitý lineární systém má dva póly $p_1 = -2,\ p_2 = -1$ a jednu nulu $n_1 = 0$ a jeho operátorový přenos má koeficient u nejvyšší mocniny čitatele roven 20 a koeficient u nejvyšší mocniny jmenovatele roven 1.

a) Napište jeho operátorový přenos (**3b).**
b) Napište jeho diferenciální rovnici (**2b).**
c) Načrtněte amplitudovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích (**5b)**. Vyznačte sklony asymptot (**1b**) a ocejchujte osy (**1b**).
d) Vypočtěte (**4b**) a načrtněte (**4b**) přechodovou charakteristiku.

Řešení

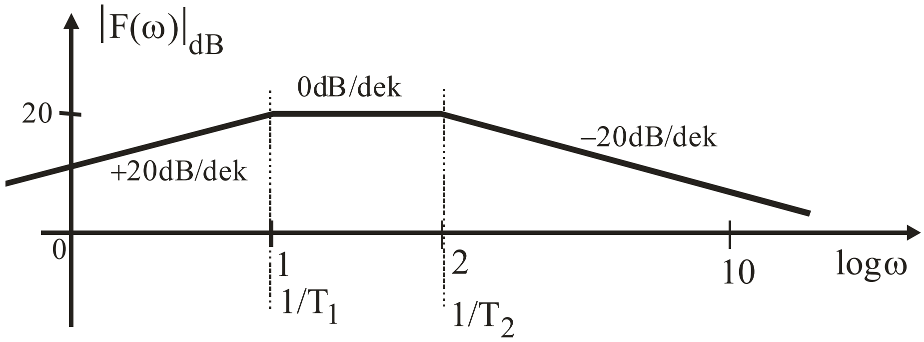
a) $F(p) = \dfrac{20}{1}\dfrac{p}{(p+1)(p+2)} = \dfrac{20p}{p^2+3p+2}$

b) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 20u'(t)$

c) Upravíme přenos na tvar $F(p) = \dfrac{20p}{(p+1)(p+2)} = \dfrac{20p}{2(p+1)(0{,}5p+1)} = \dfrac{Kp}{(T_1p+1)(T_2p+1)}$

kde $K = 10, T_1 = 1, T_2 = 0{,}5$. Určíme frekvenční přenos systému. Bude

$$F(j\omega) = \frac{K\omega}{\sqrt{T_1^2\omega^2+1}\sqrt{T_2^2\omega^2+1}} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - arctgT_1\omega - arctgT_2\omega\right)} = \frac{10\omega}{\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{0{,}25\omega^2+1}} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - arctg\omega - arctg\,0{,}5\omega\right)}$$



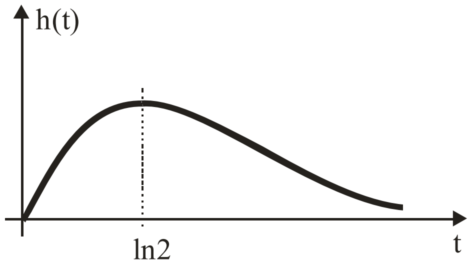
d) Pro přechodovou charakteristiku platí

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}F(p)\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\frac{20p}{(p+1)(p+2)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{20}{(p+1)(p+2)}\right\}$$

Rozkladem na parciální zlomky obdržíme:

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{20}{(p+1)} - \frac{20}{(p+2)}\right\} = 20\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)$$

Platí $h(0) = 0, h(\infty) = 0$ a přechodová charakteristika je nekmitavá (systém nemá komplexní póly).



O tom, že je přechodová charakteristika nekmitavá se lze přesvědčit i nalezením jejich extrémů. Platí $h'(t) = \frac{dh(t)}{dt} = 20\left(-e^{-t} + 2e^{-2t}\right)$. Extrémy nastávají v bodech kde $h'(t) = 0$. Tedy v bodech

$$20\left(-e^{-t} + 2e^{-2t}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad -e^{-t} + 2e^{-2t} \quad \Rightarrow \quad 2e^{-2t} = e^{-t} \quad \Rightarrow \quad e^{t} = 2 \quad \Rightarrow \quad t = \ln 2$$

Extrém je jediný a tedy charakteristika je nekmitavá.

3. Je dán diskrétní signál $f(k) = Ae^{j\frac{2\pi}{N}k}, k \in (-\infty, +\infty)$ kde *k* je pořadové číslo vzorku.

a) Ukažte, že tato posloupnost je periodická s periodou N (**5b**)

b) Určete výkon tohoto signálu (**5b**).

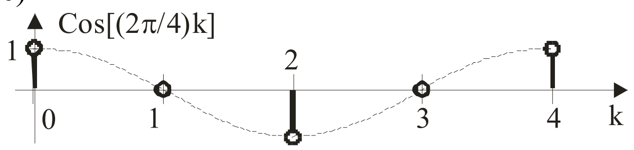
c) Načrtněte jednu periodu reálné a imaginární části tohoto signálu pro $N = 4$ (**5b**).

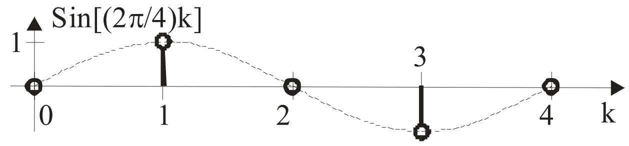
Řešení

a) $f(k+N) = Ae^{j\frac{2\pi}{N}(k+N)} = Ae^{j\frac{2\pi}{N}k}e^{j\frac{2\pi}{N}N} = Ae^{j\frac{2\pi}{N}k}e^{j2\pi} = Ae^{j\frac{2\pi}{N}k} = f(k)$

b) $P_W = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|f(k)\right|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|Ae^{j\frac{2\pi}{N}k}\right|^2 = \frac{A^2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right|^2 = \frac{A^2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}1 = \frac{A^2}{N}N = A^2$

c)





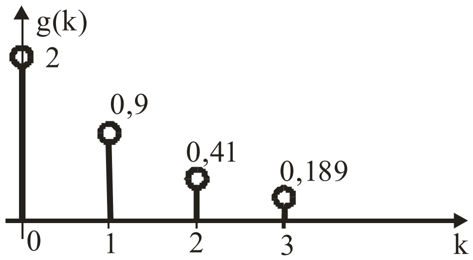
4. Diskrétní lineární systém má impulsovou charakteristiku $g(k)=\begin{cases}0,5^k+0,4^k & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$.

a) Vypočtěte první 4 hodnoty impulsové charakteristiky (**3b**) a načrtněte ji (**2b**).
b) Vypočtěte první 4 hodnoty přechodové charakteristiky (**3b**) a načrtněte ji (**2b**)
c) Určete operátorový přenos systému (**5b**).
d) Napište diferenční rovnici systému(**2b**)
e) Nakreslete jeho rozložení pólů a nul (**3b**)

Řešení

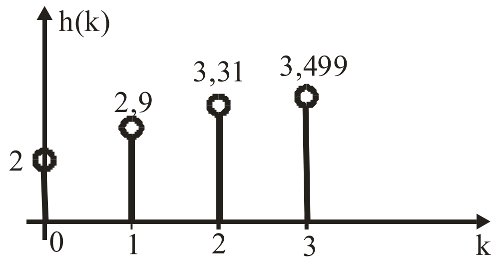
a) Platí

$$g(0)=0,5^0+0,4^0=1+1=2$$
$$g(1)=0,5^1+0,4^1=0,5+0,4=0,9$$
$$g(2)=0,5^2+0,4^2=0,25+0,16=0,41$$
$$g(3)=0,5^3+0,4^3=0,125+0,064=0,189$$



b)

$$h(0)=g(0)=2$$
$$h(1)=h(0)+g(1)=2+0,9=2,9$$
$$h(2)=h(1)+g(2)=2,9+0,41=3,31$$
$$h(3)=h(2)+g(3)=3,31+0,189=3,499$$



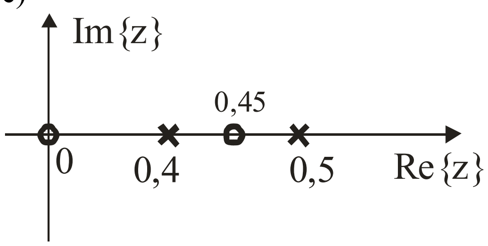
c)

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}g(k)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(0,5^k+0,4^k\right)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}0,5^k z^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}0,4^k z^{-k}=\frac{1}{1-0,5z^{-1}}+\frac{1}{1-0,4z^{-1}}=$$
$$=\frac{z}{z-0,5}+\frac{z}{z-0,4}=\frac{z^2-0,4z+z^2-0,5z}{(z-0,5)(z-0,4)}=\frac{2z^2-0,9z}{(z-0,5)(z-0,4)}=\frac{2z(z-0,45)}{(z-0,5)(z-0,4)}$$

d)

$$F(z)=\frac{2z(z-0,45)}{(z-0,5)(z-0,4)}=\frac{2z^2-0,9z}{z^2-0,9z+0,2}=\frac{2-0,9z^{-1}}{1-0,9z^{-1}+0,2z^{-2}}=\frac{Y(z)}{U(z)}$$
$$y(k)-0,9y(k-1)+0,2y(k-2)=2u(k)-0,9u(k-1)$$

e)



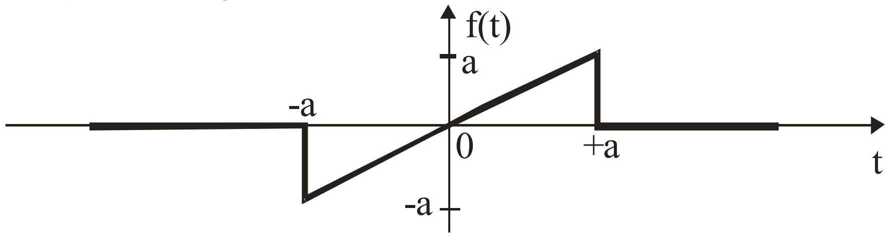
2004 BSAS Písemka 1	Skupina B

1. Je dán signál $f(t) = t\left[\sigma(t+a) - \sigma(t-a)\right] \quad t \in (-\infty, +\infty)$.

a) Určete zda je signál periodický (**2b)**
b) Načrtněte průběh signálu (**4b)**
c) Určete hodnotu spektra pro kmitočet $\omega = 0$ (**3b**) a zdůvodněte výsledek (**2b**).
d) Určete energii signálu (**4b**).

Řešení

a) Signál není periodický.
b) Průběh signálu



c) $F(\omega)\Big|_{\omega=0} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt\Bigg|_{\omega=0} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int\limits_{-a}^{+a} t dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-a}^{+a} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$

Hodnota spektra pro kmitočet $\omega = 0$ vyjadřuje střední hodnotu (stejnosměrnou složku) signálu a ta je nulová (plochy signálu nad i pod osou jsou stejné).

d) $E = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right|^2 dt = \int\limits_{-a}^{+a} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-a}^{+a} = \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$

2. Spojitý lineární systém má impulsovou charakteristiku $g(t)=\begin{cases}5\left(e^{-t/5}-e^{-t/3}\right) & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$.

a) Vypočtěte operátorový přenos systému (**3b**).
b) Napište diferenciální rovnici systému (**2b**).
c) Načrtněte amplitudovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích (**5b)**. Vyznačte sklony asymptot (**1b**) a ocejchujte osy (**1b**).
d) Vypočtěte (**4b**) a načrtněte (**4b**) přechodovou charakteristiku.

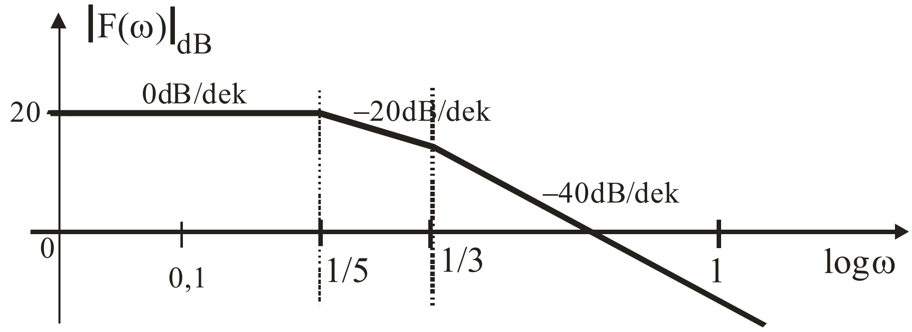
Řešení

a)
$$F(p)=\mathscr{L}\{g(t)\}=\mathscr{L}\left\{5\left(e^{-t/5}-e^{-t/3}\right)\right\}=\frac{5}{p+1/5}-\frac{5}{p+1/3}=\frac{25}{5p+1}-\frac{15}{3p+1}=$$
$$=\frac{10}{(5p+1)(3p+1)}=\frac{10}{15p^2+8p+1}$$

b) Diferenciální rovnice $15y''(t)+8y'(t)+y(t)=10u(t)$

c) Pro frekvenční přenos systému platí

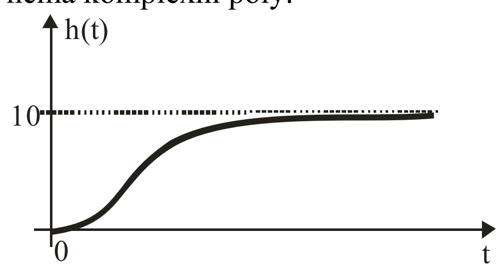
$$F(j\omega)=\frac{10}{\sqrt{25\omega^2+1}\sqrt{9\omega^2+1}}e^{-j(arctg\,5\omega+arctg\,3\omega)}$$



d) Pro přechodovou charakteristiku platí

$$h(t)=\int_0^t g(\tau)\,d\tau=\int_0^t 5\left(e^{-\tau/5}-e^{-\tau/3}\right)d\tau=5\left[-5e^{-\tau/5}+3e^{-\tau/3}\right]_0^t=5\left[3e^{-t/3}-5e^{-t/5}-(-5+3)\right]=$$
$$=10\left(1-\frac{5}{2}e^{-t/5}+\frac{3}{2}e^{-t/3}\right)$$

Dále platí $h(0)=0, h(\infty)=10$. Pro směrnici tečny platí $\frac{dh(t)}{dt}=h'(t)=g(t)$ a proto $h'(0)=g(0)=0, h'(\infty)=g(\infty)=0$. Přechodová charakteristika musí být nekmitavá, protože systém nemá komplexní póly.



Jiný způsob určení přechodové charakteristiky:

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}F(p)\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\frac{10}{(5p+1)(3p+1)}\right\}$$ a dále rozkladem na parciální zlomky obdržíme

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{10}{p} - \frac{25/2}{(5p+1)} + \frac{15/2}{(3p+1)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{10}{p} - \frac{5/2}{(p+1/5)} + \frac{3/2}{(p+1/3)}\right\} = 10\left(1 - \frac{5}{2}e^{-t/5} + \frac{3}{2}e^{-t/3}\right)$$

3. Je dán spojitý signál $f(t) = \cos\omega_0 t, \quad t \in (-\infty, +\infty), \omega_0 = \pi / 6$. Tento signál je vzorkován a perioda vzorkování je $T_s = 2$ sec.

a) Lze takto získaný diskrétní signál zpětně rekonstruovat pomocí ideálního filtru typu dolní propust(**5b**)? Odpovězte Ano/Ne a zdůvodněte.

b) Je takto získaný diskrétní signál periodický (**5b**)? Odpovězte Ano/Ne, zdůvodněte a pokud je periodický určete jeho periodu.

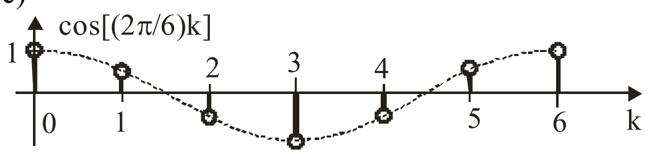
c) Načrtněte prvních 6 vzorků diskrétního signálu (**5b**).

Řešení

a) Nejvyšší kmitočet ve spektru spojitého signálu je $\omega_0 = \pi / 6$. Kmitočet vzorkování je $\omega_s = 2\pi / T_s = 2\pi / 2 = \pi$. Diskrétní signál bude možno zpětně rekonstruovat, bude-li splněna podmínka Shanonova teorému $\omega_s / \omega_0 > 2$. Platí $\dfrac{\omega_s}{\omega_0} = \dfrac{\pi}{\pi / 6} = 6 > 2$. Podmínka je splněna a proto lze signál rekonstruovat.

b) Vzhledem k tomu, že poměr $\omega_s / \omega_0 = 6$ je celé číslo (v jedné periodě spojitého signálu je celistvý počet vzorků) je diskrétní signál periodický s periodou $N = 6$.

c)



4. Lineární diskrétní systém má dva póly $z_1 = +0,8$, $z_2 = -0,8$ a jednu nulu $n_1 = 0$. Koeficient u nejvyšší mocniny čitatele je roven 1,6 a koeficient u nejvyšší mocniny jmenovatele je roven 1.

a) Určete operátorový přenos systému (**5b**).
b) Napište jeho diferenční rovnici (**2b**)
c) Vypočtěte jeho impulsní charakteristiku (**6b**) a načrtněte ji pro prvních 5 hodnot (**2b**).
d) Vypočtěte prvních 5 hodnot přechodové charakteristiky (**3b**) a načrtněte ji (**2b**).

Řešení

a)

$$F(z) = \frac{1,6}{1}\frac{z}{(z-0,8)(z+0,8)} = \frac{1,6z}{z^2-0,8^2} = \frac{1,6z}{z^2-0,64}$$

b)

$$F(z) = \frac{1,6z}{z^2-0,64} = \frac{1,6z^{-1}}{1-0,64z^{-2}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$y(k) - 0,64y(k-2) = 1,6u(k-1)$$

c)

$$F(z) = \frac{1,6z}{(z-0,8)(z+0,8)} = \frac{z}{z-0,8} - \frac{z}{z+0,8} = \frac{1}{1-0,8z^{-1}} - \frac{1}{1+0,8z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} 0,8^k z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} (-0,8)^k z^{-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left[0,8^k - (-0,8)^k\right] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 0,8^k \left[1-(-1)^k\right] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} \quad \Rightarrow \quad g(k) = 0,8^k\left[1-(-1)^k\right]$$

$$g(0) = 0,8^0[1-1] = 0$$

$$g(1) = 0,8^1[1+1] = 1,6$$

$$g(2) = 0,8^2[1-1] = 0$$

$$g(3) = 0,8^3[1+1] = 1,024$$

$$g(4) = 0,8^4[1-1] = 0$$

d)

$$h(0) = g(0) = 0$$

$$h(1) = h(0) + g(1) = 0 + 1,6 = 1,6$$

$$h(2) = h(1) + g(2) = 1,6 + 0 = 1,6$$

$$h(3) = h(2) + g(3) = 1,6 + 1,024 = 2,624$$

$$h(4) = h(3) + g(4) = 2,624 + 0 = 2,624$$