Semestrální písemný test z předmětu BSAS **Náhradní termín 4.2.2004**

1. Je dán signál $f(t) = [\sigma(t+1) - \sigma(t-1)](\cos^2 2\pi t + \sin^2 2\pi t), \quad t \in (-\infty, +\infty)$.

a) Načrtněte průběh funkce $\sigma(t+1) - \sigma(t-1)$. Předpokládejte, že $\sigma(0) = 1$. (**3b**)

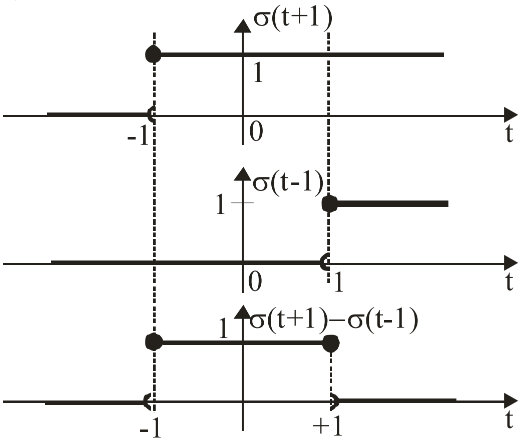
b) Určete zda je signál $f(t)$ periodický. Pokud je periodický, určete jeho periodu. (**1b**)

c) Určete jeho komplexní spektrum. (**2b**)

d) Načrtněte komplexní spektrum (**4b**). Ocejchujte osy. **Celkem 10b**

Řešení:

a)

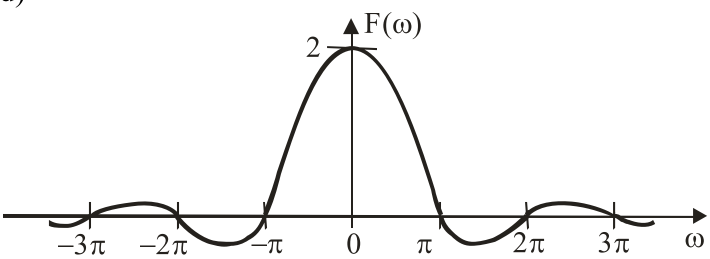


b) Signál není periodický.

c) Vzhledem k tomu, že $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ platí $f(t) = \sigma(t+1) - \sigma(t-1)$, a proto

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-1}^{+1} e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-1}^{+1} = \frac{e^{-j\omega} - e^{+j\omega}}{-j\omega} = 2\frac{\sin\omega}{\omega}$$

d)



2. Je dán signál $f(t)=\left[\sigma(t)+\sigma(-t)\right]\cos 2\pi t, \quad t\in(-\infty,+\infty)$.

e) Načrtněte průběh funkce $\sigma(t)+\sigma(-t)$. Předpokládejte, že $\sigma(0)=1/2$. (**3b**)

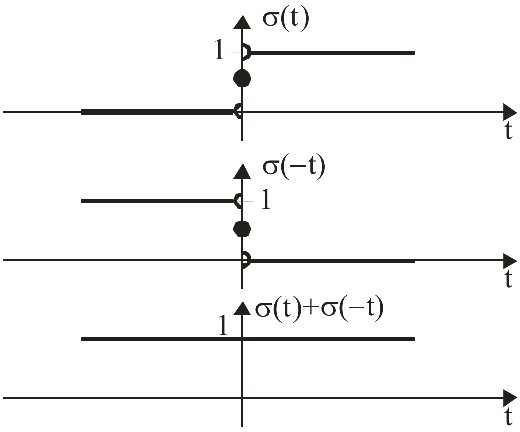
f) Určete zda je signál $f(t)$ periodický. Pokud je periodický, určete jeho periodu. (**1b**)

g) Určete jeho komplexní spektrum. (**2b**)

h) Načrtněte amplitudové (**2b**) a fázové spektrum (**2b**). Ocejchujte osy. **Celkem 10b**

Řešení:

a) Podle předpokladu je $\sigma(0)=1/2$, a proto $\left[\sigma(t)+\sigma(-t)\right]=1, \quad t\in(-\infty,+\infty)$.

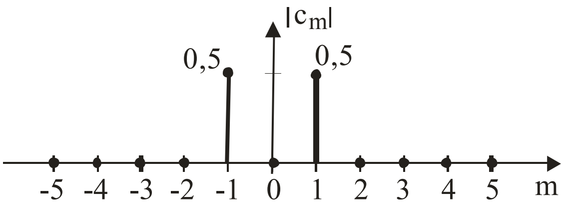


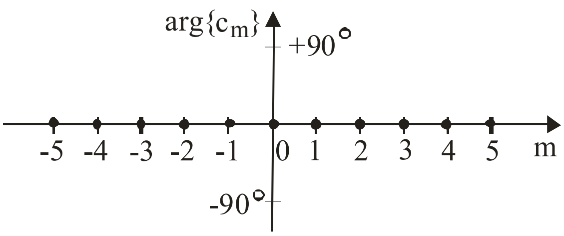
b) Jelikož $\left[\sigma(t)+\sigma(-t)\right]=1, \quad t\in(-\infty,+\infty)$ je $f(t)=\cos 2\pi t, \quad t\in(-\infty,+\infty)$. Signál je tedy periodický a platí $\omega_0=\dfrac{2\pi}{P}=2\pi \Rightarrow P=1[s]$

b) $f(t)=\cos 2\pi t=\dfrac{e^{j2\pi t}+e^{-j2\pi t}}{2}=0,5e^{-j2\pi t}+0,5e^{j2\pi t}$

$c_{-1}=+0,5 \quad c_{+1}=+0,5$ ostatní koeficienty jsou nulové.

c) $|c_{-1}|=|c_{+1}|=0,5 \qquad \arg\{c_{-1}\}=0^\circ \quad \arg\{c_{+1}\}=0^\circ$





3. Diferenciální rovnice spojitého systému je $y' + 0{,}1y = u$.

a) Určete operátorový přenos systému. (**1b**)

b) Určete frekvenční přenos systému. (**1b**)

c) Načrtněte asymptotickou amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Ocejchujte osy. (**4b**)

d) Vypočtěte (**2b**) a načrtněte (**2b**) přechodovou charakteristiku systému. **Celkem 10b**

Řešení:

a) $y'(t) + 0{,}1y(t) = u(t) \quad /\mathscr{L} \quad \Rightarrow pY(p) + 0{,}1Y(p) = U(p)$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p+0{,}1)} = \frac{10}{(10p+1)}$$

b) $F(j\omega) = \dfrac{10}{(10j\omega+1)} = \dfrac{10}{\sqrt{100\omega^2+1}} e^{-j\arctan 10\omega}$

c) Pro absolutní hodnotu platí:

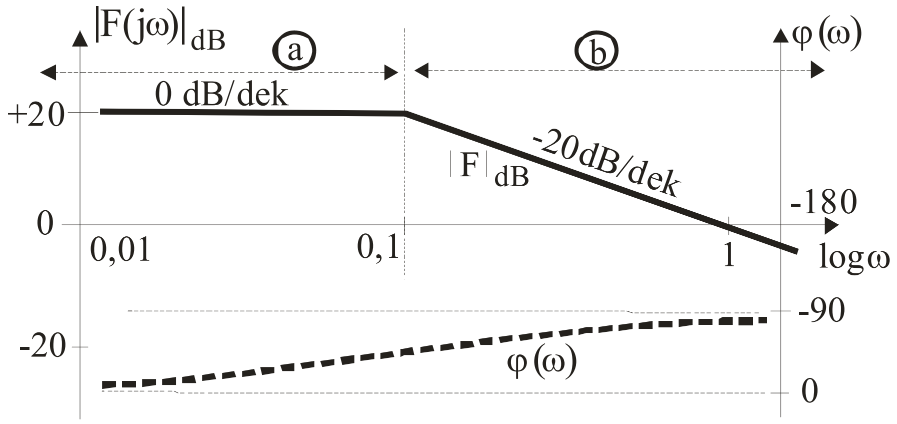
$$\left|F(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\left|F(j\omega)\right| = 20\log 10 - 20\log\sqrt{100\omega^2+1} = 20 - 20\log\sqrt{100\omega^2+1}$$

Na charakteristice je jeden zlomový bod $\omega = 1/10 = 0{,}1$ a v jednotlivých oblastech platí:

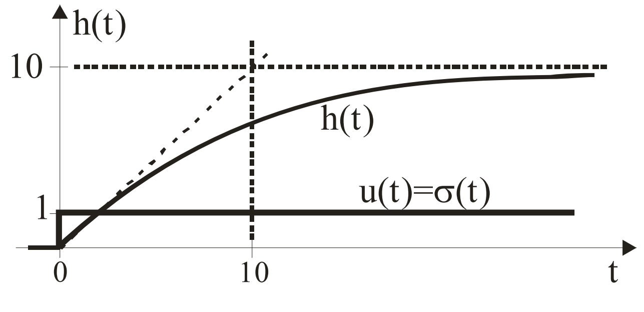
Oblast a: $\omega \ll 0{,}1 \Rightarrow \left|F(j\omega)\right|_{dB} \approx +20\ dB$

Oblast b: $\omega \gg 0{,}1 \Rightarrow \left|F(j\omega)\right|_{dB} \approx 20 - 20\log 10\omega = 20 - 20\log 10 - 20\log\omega = -20\log\omega$.

Pro fázi platí $\varphi(\omega) = -\arctan 10\omega$.



d) $h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p}F(p)\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p(p+0{,}1)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{10}{p} - \dfrac{10}{p+0{,}1}\right\} = 10\left(1 - e^{-t/10}\right) \quad pro\ t > 0$



4. Je dán spojitý systém, který má impulsovou charakteristiku $g(t)=10\left(1-e^{-t/10}\right), t \geq 0$.

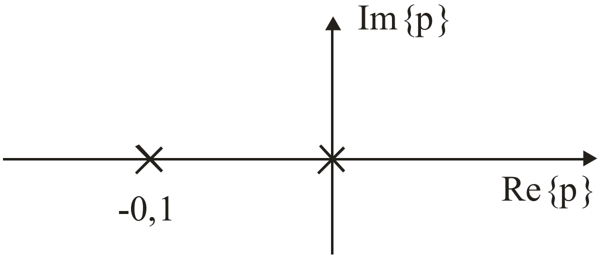
a) Určete jeho operátorový přenos. (**2b**)
b) Napište jeho diferenciální rovnici. (**2b**)
c) Nakreslete rozložení pólů a nul. (**2b**). Označte osy. (**2b**)
d) Je tento systém stabilní? Zdůvodněte. (**2b**) **Celkem 10b**

Řešení:

a) $F(p)=\mathscr{L}\{g(t)\}=\mathscr{L}\left\{10\sigma(t)-10e^{-0,1t}\right\}=\frac{10}{p}-\frac{10}{p+0,1}=\frac{1}{p(p+0,1)}=\frac{10}{p(10p+1)}$.

b) $F(p)=\frac{1}{p(p+0,1)}=\frac{Y(p)}{U(p)} \Rightarrow p^2Y(p)+0,1pY(p)=U(p) \Rightarrow y''+0,1y'=u$

c) Systém má 2 póly $p_1=0,\ p_2=-0,1$ a žádnou nulu.



d) Jeden pól leží v nule (tj. na imaginární ose)- systém je na mezi stability.

5. Je dán diskrétní periodický signál s periodou $N = 4$ pro jehož hodnoty platí $f(0) = f(2) = 2$ a $f(1) = f(3) = 0$.

a) Vypočtěte hodnoty diskrétní Fourierovy řady. (**4b**)
b) Načrtněte amplitudové spektrum. Ocejchujte osy.(**3b**)
c) Načrtněte fázové spektrum. Ocejchujte osy.(**3b**) **Celkem 10b**

Řešení:

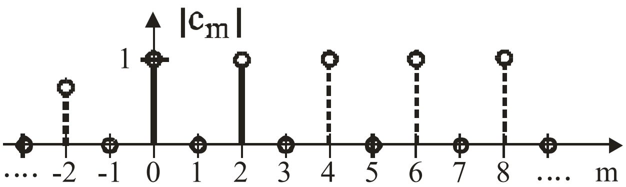
a) $c_0 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k) e^{-j0\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}(2\times1 + 0\times1 + 2\times1 + 0\times1) = 1$

$$c_1 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k) e^{-j1\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}\left(2\times1 + 0\times e^{-j\frac{\pi}{2}1} + 2\times e^{-j\frac{\pi}{2}2} + 0\times e^{-j\frac{\pi}{2}3}\right) = \frac{2-2}{4} = 0$$

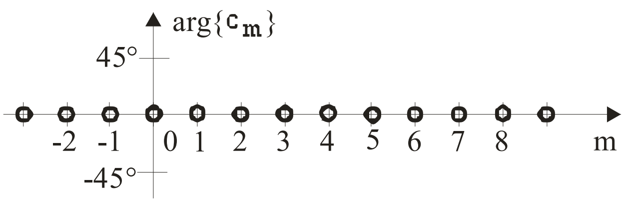
$$c_2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k) e^{-j2\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}\left(2\times1 + 0\times e^{-j2\frac{\pi}{2}1} + 2\times e^{-j2\frac{\pi}{2}2} + 0.e^{-j2\frac{\pi}{2}3}\right) = \frac{2+2}{4} = 1$$

$$c_3 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k) e^{-j3\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}\left(2\times1 + 0\times e^{-j3\frac{\pi}{2}1} + 2\times e^{-j3\frac{\pi}{2}2} + 0\times e^{-j3\frac{\pi}{2}3}\right) = \frac{2-2}{4} = 0$$

b) $|c_0| = 1 \quad |c_1| = 0 \quad |c_2| = 1 \quad |c_3| = 0$



c) $\arg\{c_0\} = 0 \quad \arg\{c_1\} = 0 \quad \arg\{c_2\} = 0 \quad \arg\{c_3\} = 0$



6. Diferenční rovnice diskrétního systému je $y(k)+ay(k-1)=u(k-1)$, $k=0,1,2,...$

s počáteční podmínkou $y(-1)=0$.

a) Určete operátorový přenos systému. (**2b**)
b) Pro jaké hodnoty parametru a je systém stabilní. (**2b**)
c) Vypočtěte impulsovou charakteristiku. (**3b**)
d) Načrtněte impulsovou charakteristiku pro prvních 5 hodnot systému ve kterém je $a\in(0,1)$. Ocejchujte osy. (**3b**) **Celkem 10b**

Řešení:

a) $y(k)+ay(k-1)=u(k-1) \quad /\mathcal{Z}$

$$Y(z)+az^{-1}Y(z)=z^{-1}U(z)$$

$$F(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z^{-1}}{1+az^{-1}}=\frac{1}{z+a}$$

b) Systém má jeden pól $z_1=-a$, který musí ležet uvnitř jednotkové kružnice aby byl systém stabilní tj. $|a|<1$.

c) Operátorový přenos lze vyjádřit jako součet geometrické řady

$$F(z)=\frac{z^{-1}}{1+az^{-1}}=z^{-1}\frac{1}{1-\left(-az^{-1}\right)}=z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-az^{-1}\right)^k=z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-a)^k z^{-k}=z^{-1}\mathcal{Z}\left\{(-a)^k\right\}$$

což je podle definice Z obraz impulsové charakteristiky a proto

$$g(k)=\begin{cases}(-a)^{k-1} & k\ge 1\\ 0 & k<1\end{cases}.$$

Jiné řešení: Dělení polynomu čitatele polynomem jmenovatele operátorového přenosu

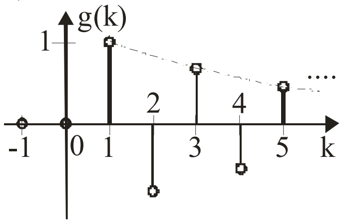
$$\begin{array}{l}
1 : (z+a) = 0z^0 + a^0z^{-1} - a^1z^{-2} + a^2z^{-3} - a^3z^{-4} + \ldots\\
\underline{1 + az^{-1}}\\
\quad -az^{-1}\\
\underline{\quad -az^{-1} - a^2z^{-2}}\\
\qquad +a^2z^{-2}\\
\underline{\qquad +a^2z^{-2} + a^3z^{-3}}\\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Koeficienty u jednotlivých mocnin z jsou hodnoty impulsové charakteristiky
$g(0)=0,\ g(1)=a^0,\ g(2)=-a^1,\ g(3)=a^2,\ g(4)=-a^3,\ldots\ldots$

Jiné řešení: Do diferenční rovnice $y(k)=-ay(k-1)+u(k-1)$ dosadíme za $u(k)=\delta(k)$ (výstup systému pak bude jeho impulsovou charakteristikou tj. $y(k)=g(k)$)a vyčíslujeme postupně pro $k=0,1,2,\ldots$.

$$k \geq 0 \quad y(k) = -ay(k-1) + u(k-1)$$
$$k = 0 \quad y(0) = -ay(-1) + u(-1) = 0+0=0$$
$$k = 1 \quad y(1) = -ay(0) + u(0) = 0+1=1$$
$$k = 2 \quad y(2) = -ay(1) + u(1) = -a+0=-a$$
$$k = 3 \quad y(3) = -ay(2) + u(2) = (-a)(-a)+0=a^2$$
$$k = 4 \quad y(4) = -ay(3) + u(3) = (-a)a^2+0=-a^3$$
....

d)



7. Diskrétní systém je popsán svojí impulsovou charakteristikou

$$g(k)=\begin{cases}0,25 & k=0,1,2,3\\ 0 & k\neq 0,1,2,3\end{cases}.$$

a) Určete přechodovou charakteristiku systému a načrtněte ji pro prvních 5 hodnot. Ocejchujte osy. (**3b**)

b) Určete operátorový přenos systému. (**3b**)

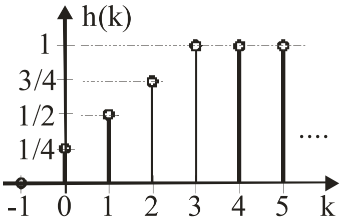
c) Napište diferenční rovnici systému. (**2b**)

d) Rozhodněte o stabilitě systému. (**2b**) **Celkem 10b**

Řešení:

a) $h(0)=g(0)=1/4,\quad h(1)=g(0)+g(1)=1/2,\quad h(2)=g(0)+g(1)+g(3)=3/4$

$h(3)=g(0)+g(1)+g(3)+g(4)=1,\quad h(k)=1\quad k\geq 4$



b)

$$F(z)=\mathcal{Z}\{g(k)\}=\sum_{k=0}^{\infty}g(k)z^{-k}=\frac{1}{4}z^{0}+\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}+\frac{1}{4}z^{-3}=\frac{1}{4}\left(z^{0}+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}\right)=\frac{z^{3}+z^{2}+z^{1}+1}{4z^{3}}$$

c) $F(z)=\dfrac{Y(z)}{U(z)}=\dfrac{1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}}{4}\quad\Rightarrow\quad Y(z)4=U(z)\left(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}\right)$

$$\Rightarrow\quad y(k)=\frac{1}{4}\left[u(k)+u(k-1)+u(k-2)+u(k-3)\right]$$

d) Systém má jeden trojnásobný pól $z_1=0$ který leží v nule a tedy uvnitř jednotkové kružnice a proto je systém stabilní.