Semestrální písemný test z předmětu BSAS **Řádný termín 23.1.2004**

1. Je dán signál $f(t) = 2 + \sin 2\pi t + \cos 6\pi t, \quad t \in (-\infty, +\infty)$.

a) Pokud je signál periodický určete základní periodu signálu. (**1b**)
b) Určete jeho komplexní spektrum. (**2b**)
c) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum. Ocejchujte osy. (**5b**)
d) Jaká je hodnota stejnosměrné složky tohoto signálu. (**1b**)
e) Které harmonické složky tento signál obsahuje. (**1b**) **Celkem 10b**

Řešení:

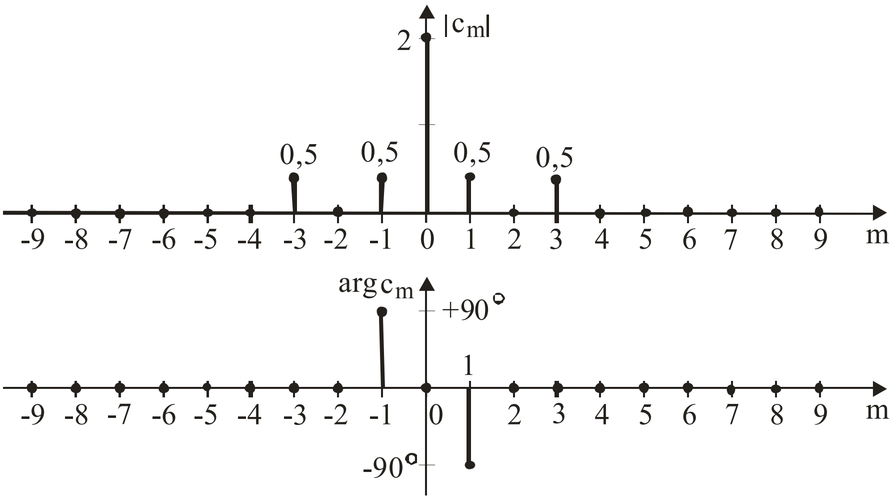
a) Signál je periodický, $\omega_0 = \frac{2\pi}{P} = 2\pi \Rightarrow P = 1[s]$

b) $f(t) = 2 + \frac{e^{j2\pi t} - e^{-j2\pi t}}{2j} + \frac{e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}}{2} = 0,5e^{-j6\pi t} + j0,5e^{-j2\pi t} + 2 - j0,5e^{j2\pi t} + 0,5e^{j6\pi t}$

$c_0 = 2 \quad c_{-1} = +j0,5 \quad c_{+1} = -j0,5 \quad c_{-3} = c_{+3} = 0,5$ ostatní koeficienty jsou nulové.

c) $|c_0| = 2 \quad |c_{-1}| = |c_{+1}| = |c_{-3}| = |c_{+3}| = 0,5$

$\arg\{c_0\} = 0 \quad \arg\{c_{-1}\} = +90^\circ \quad \arg\{c_{+1}\} = -90^\circ \quad \arg\{c_{-3}\} = \arg\{c_{+3}\} = 0$



d) Hodnota stejnosměrné složky je 2.

e) Signál obsahuje první a třetí harmonickou složku.

2. Je dán signál $f(t) = K \; pro \; t \in (0, a), \; f(t) = 0 \; pro \; t \notin (0, a)$.

a) Určete komplexní spektrum signálu. (**3b**)

b) Určete a načrtněte amplitudové spektrum. Ocejchujte osy. (**4b**)

Pomůcka: $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}$

c) Určete celkovou energii signálu. (**1b**)

d) Určete energii signálu v kmitočtovém rozsahu $\omega \in (-\infty, +\infty)$. (**2b**) **Celkem 10b**

Řešení:

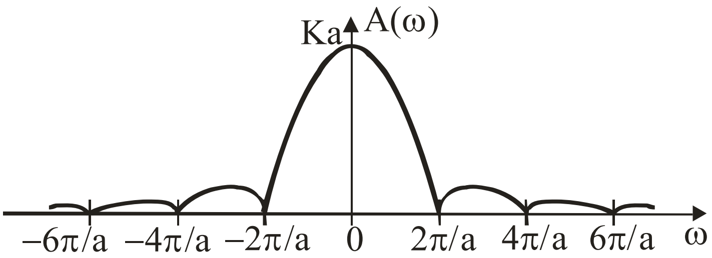
a) $F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int\limits_{0}^{a} K e^{-j\omega t} dt = K\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_0^a = \frac{K}{-j\omega}\left(e^{-j\omega a} - 1\right) = j\frac{K}{\omega}\left(e^{-j\omega a} - 1\right)$

b) Amplitudové spektrum

$$A(\omega) = |F(\omega)| = \frac{K}{\omega}\left|e^{-j\omega a} - 1\right| = \frac{K}{\omega}\left|\cos\omega a - j\sin\omega a - 1\right| = \frac{K}{\omega}\sqrt{(\cos\omega a - 1)^2 + \sin^2\omega a} =$$

$$= \frac{K}{\omega}\sqrt{\cos^2\omega a - 2\cos\omega a + 1 + \sin^2\omega a} = \frac{K}{\omega}\sqrt{2(1-\cos\omega a)} = \frac{2K}{\omega}\left|\sin\frac{\omega a}{2}\right| = Ka\left|\frac{\sin\frac{\omega a}{2}}{\frac{\omega a}{2}}\right|$$

Nulové body amplitudového spektra: $\frac{\omega a}{2} = n\pi, \; n = \pm 1, \pm 2, ... \Rightarrow \omega = n\frac{2\pi}{a}$



c) $E = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int\limits_{0}^{a} K^2 dt = K^2 [t]_0^a = K^2 a$.

d) Na základě Parcevalovy rovnosti (energie v časové oblasti je rovna energii v kmitočtové oblasti) platí $E_{(-\infty,+\infty)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = K^2 a$.

3. Diferenciální rovnice spojitého systému je $y'' + y' = u$.

a) Určete operátorový přenos systému. (**1b**)

b) Určete frekvenční přenos systému. (**1b**)

c) Načrtněte asymptotickou amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Ocejchujte osy. (**4b**)

d) Vypočtěte (**2b**) a načrtněte (**2b**) impulsní charakteristiku systému. **Celkem 10b**

Řešení:

a) $y''(t) + y'(t) = u(t) \quad / \mathscr{L} \quad \Rightarrow p^2 Y(p) + pY(p) = U(p) \quad \Rightarrow F(p) = \dfrac{Y(p)}{U(p)} = \dfrac{1}{p(p+1)}$

b) $F(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega(j\omega+1)} = \dfrac{1}{\omega\sqrt{\omega^2+1}} e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\omega\right)}$

c) Pro absolutní hodnotu platí:

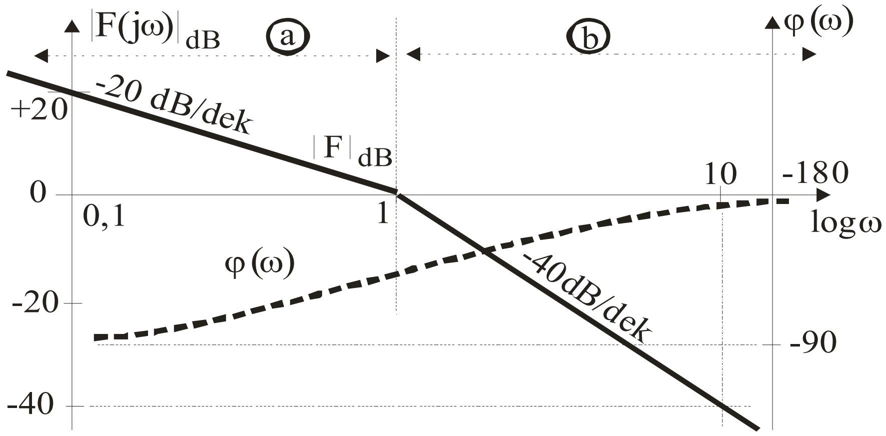
$$\left|F(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\left|F(j\omega)\right| = 20\log 1 - 20\log\omega - 20\log\sqrt{\omega^2+1} = -20\log\omega - 20\log\sqrt{\omega^2+1}$$

Na charakteristice je jeden zlomový bod $\omega = 1$ a v jednotlivých oblastech platí:

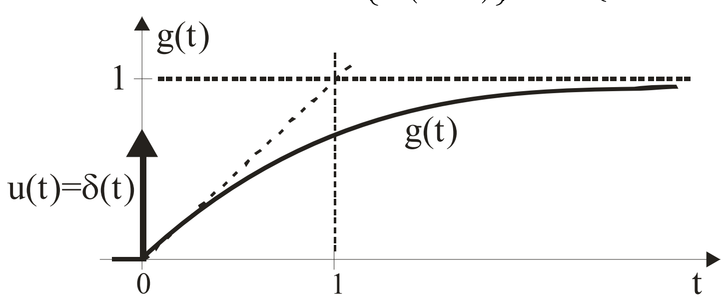
Oblast a: $\omega \ll 1 \Rightarrow \left|F(j\omega)\right|_{dB} \approx -20\log\omega$

Oblast b: $\omega \gg 1 \Rightarrow \left|F(j\omega)\right|_{dB} \approx -20\log\omega - 20\log\omega = -40\log\omega$.

Pro fázi platí $\varphi(\omega) = -\pi/2 - \arctan\omega$.



d) $g(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p(p+1)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}\right\} = 1 - e^{-t} \quad pro\ t > 0$



4. Je dán spojitý systém, který má dva póly $p_1 = 0,\ p_2 = -1$ a žádnou nulu.

a) Je takto zadaný systém určen jednoznačně? Zdůvodněte. (**2b**)

b) Napište jeho operátorový přenos. (**2b**)

c) Je tento systém stabilní? Zdůvodněte. (**2b**)

d) Vypočtěte (**2b**) a načrtněte (**2b**) jeho impulsovou charakteristiku. **Celkem 10b**

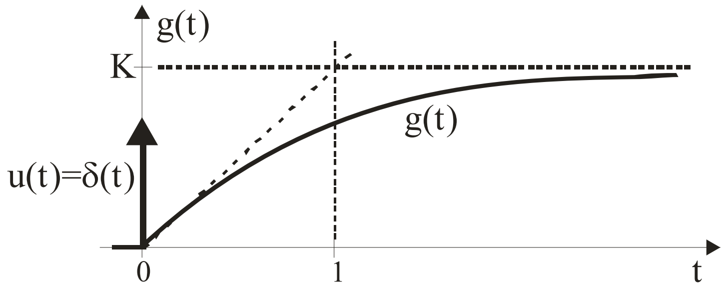
Řešení:

a) Není určen jednoznačně, chybí údaj o zesílení K.

b) $F(p) = \dfrac{K}{p(p+1)}$

c) Jeden pól leží v nule (tj. na imaginární ose)- systém je na mezi stability.

d) $g(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{K}{p(p+1)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{K}{p} - \dfrac{K}{p+1}\right\} = K\left(1-e^{-t}\right) \quad pro\ t > 0$



5. Je dán diskrétní periodický signál s periodou $N = 4$ pro jehož hodnoty platí $f(0) = f(1) = 1$ a $f(2) = f(3) = 0$.

a) Vypočtěte hodnoty diskrétní Fourierovy řady. (**4b**)
b) Načrtněte amplitudové spektrum. Ocejchujte osy.(**3b**)
c) Načrtněte fázové spektrum. Ocejchujte osy.(**3b**) **Celkem 10b**

Řešení:

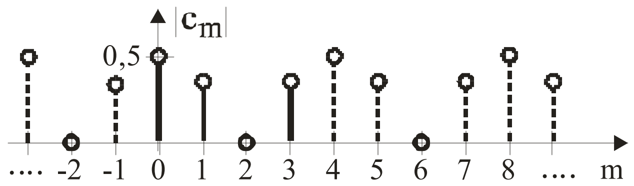
a) $c_0 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k) e^{j0\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}(1.1 + 1.1 + 0.1 + 0.1) = 0{,}5e^{j0°}$

$$c_1 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k) e^{j1\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}\left(1.1 + 1.e^{-j\frac{\pi}{2}1} + 0.e^{-j\frac{\pi}{2}2} + 0.e^{-j\frac{\pi}{2}3}\right) = \frac{1-j}{4} = 0{,}35e^{-j45°}$$

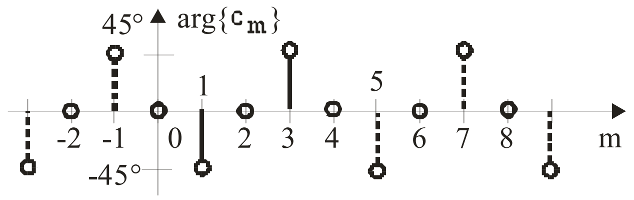
$$c_2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k) e^{j2\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}\left(1.1 + 1.e^{-j2\frac{\pi}{2}1} + 0.e^{-j2\frac{\pi}{2}2} + 0.e^{-j2\frac{\pi}{2}3}\right) = \frac{1-1}{4} = 0$$

$$c_3 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} f(k) e^{j3\frac{2\pi}{4}k} = \frac{1}{4}\left(1.1 + 1.e^{-j3\frac{\pi}{2}1} + 0.e^{-j3\frac{\pi}{2}2} + 0.e^{-j3\frac{\pi}{2}3}\right) = \frac{1+j}{4} = 0{,}35e^{+j45°}$$

b) $|c_0| = 0{,}5 \quad |c_1| = 0{,}35 \quad |c_2| = 0 \quad |c_3| = 0{,}35$



c) $\arg\{c_0\} = 0 \quad \arg\{c_1\} = -45° \quad \arg\{c_2\} = 0 \quad \arg\{c_3\} = +45°$



6. Diferenční rovnice diskrétního systému je $y(k)-ay(k-1)=u(k),\ k=0,1,2,\ldots$
s počáteční podmínkou $y(-1)=0$.

a) Určete operátorový přenos systému. (**2b**)
b) Pro jaké hodnoty parametru a je systém stabilní. (**2b**)
c) Vypočtěte impulsovou charakteristiku. (**3b**)
d) Načrtněte impulsovou charakteristiku pro prvních 5 hodnot stabilního systému. Ocejchujte osy. (**3b**) **Celkem 10b**

Řešení:

a) $y(k)-ay(k-1)=u(k) \quad /\mathcal{Z}$

$$Y(z)-az^{-1}Y(z)=U(z)$$

$$F(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$

b) Systém má jeden pól $z_1=a$, který musí ležet uvnitř jednotkové kružnice aby byl systém stabilní tj. $|a|<1$.

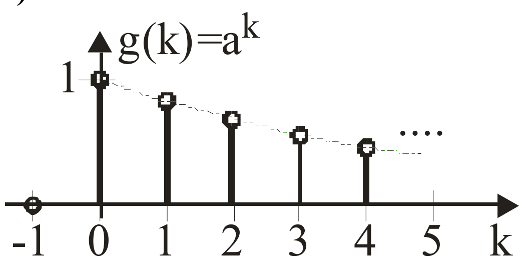
c) Operátorový přenos lze vyjádřit jako součet geometrické řady

$$F(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}=\mathcal{Z}\{g(k)\}=\mathcal{Z}\{a^k\}$$

což je podle definice Z obraz impulsové charakteristiky a proto

$$g(k)=\begin{cases}a^k & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}.$$

d)



7. Diskrétní systém je popsán svojí přechodovou charakteristikou $h(k) = k, k = 0,1,2,\dots$

a) Určete impulsovou charakteristiku systému a načrtněte ji pro prvních 5 hodnot. Ocejchujte osy. (**3b**)

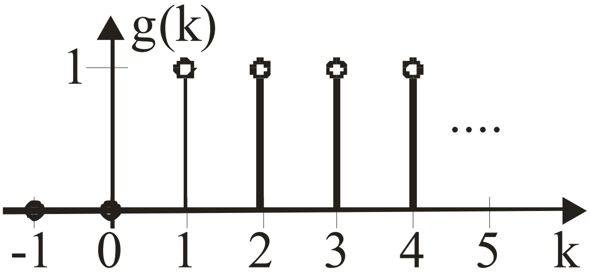
b) Určete operátorový přenos systému. (**3b**)

c) Napište diferenční rovnici systému. (**2b**)

d) Rozhodněte o stabilitě systému. (**2b**) **Celkem 10b**

Řešení:

a) $g(0) = h(0) = 0, \quad g(k) = h(k) - h(k-1) = k - (k-1) = 1 \;\; k = 1,2,\dots$



b) $F(z) = \mathcal{Z}\{g(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} - 1 = \frac{1}{1-z^{-1}} - 1 = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{z-1}$

c) $F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad Y(z)\left(1-z^{-1}\right) = U(z) z^{-1} \quad \Rightarrow \quad y(k) - y(k-1) = u(k-1)$

d) Systém má jeden pól $z_1 = 1$ který leží na jednotkové kružnici a proto je systém na mezi stability.