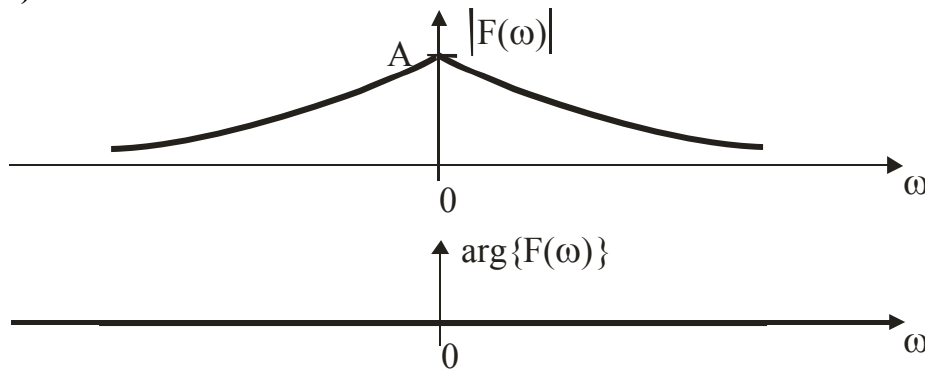


1. Je dáno spektrum spojitého signálu  $F(\omega) = Ae^{-a|\omega|}$ ,  $A, a > 0, \omega \in (-\infty, +\infty)$  (15b)

- Načrtněte amplitudové a fázové spektrum. Popište osy (2b)
- Určete zda je periodický, zdůvodněte. (1b)
- Vypočítejte časový průběh signálu (4b)
- Načrtněte časový průběh signálu (4b)
- Určete energii signálu. (4b)

### Řešení

a)



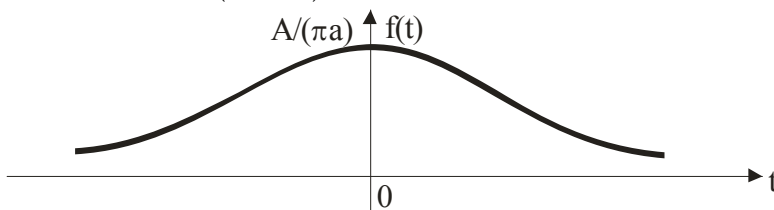
b) Jelikož spektrum signálu není diskrétní, je tento signál neperiodický.

c) Pro časový průběh signálu platí

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 Ae^{+a\omega} e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} Ae^{-a\omega} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{A}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 Ae^{\omega(a+jt)} d\omega + \int_0^{\infty} Ae^{-\omega(a-jt)} d\omega \right\} = \frac{A}{2\pi} \left\{ \left[ \frac{e^{\omega(a+jt)}}{(a+jt)} \right]_{-\infty}^0 + \left[ \frac{e^{-\omega(a-jt)}}{-(a-jt)} \right]_0^{\infty} \right\} = \\ &= \frac{A}{2\pi} \left\{ \frac{1-0}{(a+jt)} + \frac{0-1}{-(a-jt)} \right\} = \frac{A}{2\pi} \left\{ \frac{1}{(a+jt)} + \frac{1}{(a-jt)} \right\} = \frac{A}{2\pi} \frac{a-jt+a+jt}{(a+jt)(a-jt)} = \frac{A}{\pi} \frac{a}{a^2+t^2} \end{aligned}$$

d) Funkce  $f(t)$  je sudá, nezáporná a platí  $f(0) = A/(\pi a)$ ,  $f(\infty) = 0$ . Pro extrém funkce

platí  $\frac{df(t)}{dt} = \frac{A}{\pi} \frac{-2t}{a^2+t^2} = 0 \Rightarrow t = 0$ . Tedy funkce má jediný extrém v bodě  $t = 0$ .



e)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Ae^{-a|\omega|}|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |Ae^{-a\omega}|^2 d\omega = \frac{A^2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-2a\omega} d\omega = \frac{A^2}{\pi} \left[ \frac{e^{-2a\omega}}{-2a} \right]_0^{\infty} = \\ &= \frac{A^2}{\pi} \frac{0-1}{-2a} = \frac{A^2}{2\pi a} \end{aligned}$$

2. Spojitý systém je popsán diferenciální rovnicí  $y'' + y' + y = u$  (20b)

a) Určete operátorový přenos systému (2b)

b) načrtněte rozložení pólů a nul (2b)

c) vypočítejte impulsovou charakteristiku (8b)

d) načrtněte impulsovou charakteristiku. Popište osy (8b)

**Řešení**

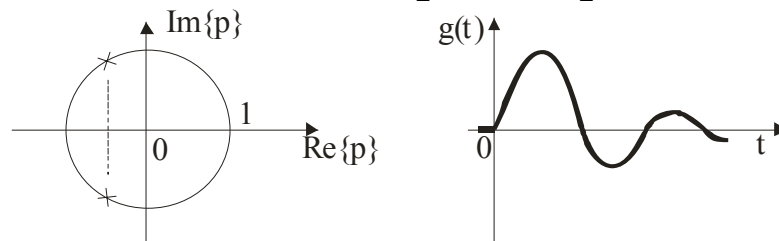
$$\text{a) } F(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}$$

Jedná se o statický systém 2. řádu s obecným operátorovým přenosem

$$F(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} \Rightarrow T = 1 \quad \xi = \frac{1}{2} \quad K = 1$$

b) Pro póly platí

$$p^2 + p + 1 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$$



c)  $g(t) = L^{-1}\{F(p)\}$  kde

$$F(p) = \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{A}{p-p_1} + \frac{B}{p-p_2} = \frac{Ap - Ap_2 + Bp - Bp_1}{(p-p_1)(p-p_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A + B = 0, \quad -Ap_2 - Bp_1 = 1 \Rightarrow Bp_2 - Bp_1 = 1 \quad B(p_2 - p_1) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B \left[ -\frac{1}{2} - j\sqrt{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} - j\sqrt{1-\frac{1}{4}} \right] = 1 \Rightarrow B 2(-j)\sqrt{1-\frac{1}{4}} = 1 \Rightarrow B 2\sqrt{\frac{3}{4}} = j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = j \frac{1}{\sqrt{3}} = j \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A = -j \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$F(p) = -j \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{1}{p-p_1} + j \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{1}{p-p_2} = -j \frac{\sqrt{3}}{3} \left[ \frac{1}{p-p_1} - \frac{1}{p-p_2} \right]$$

$$g(t) = L^{-1}\{F(p)\} = -j \frac{\sqrt{3}}{3} L^{-1} \left\{ \frac{1}{p-p_1} - \frac{1}{p-p_2} \right\} = -j \frac{\sqrt{3}}{3} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) =$$

$$= -j \frac{\sqrt{3}}{3} \left[ e^{\frac{-1+j\sqrt{3}}{2}t} - e^{\frac{-1-j\sqrt{3}}{2}t} \right] = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{t}{2}} \frac{e^{\frac{j\sqrt{3}}{2}t} - e^{-\frac{j\sqrt{3}}{2}t}}{2j} = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

d) Jedná se o stabilní statický systém 2. řádu jehož činitel poměrného tlumení je  $\xi = 0,5$  a tedy impulsní charakteristika musí mít kmitavý tlumený průběh (viz obr nahoře).

3. Je dán diskretní signál  $f(k) = Ae^{j\frac{2\pi}{N}k}$ ,  $k \in (-\infty, +\infty)$  kde  $k$  je pořadové číslo vzorku. (15b)

a) Ukažte, že tato posloupnost je periodická s periodou  $N$  (5b)

b) Určete výkon tohoto signálu (5b).

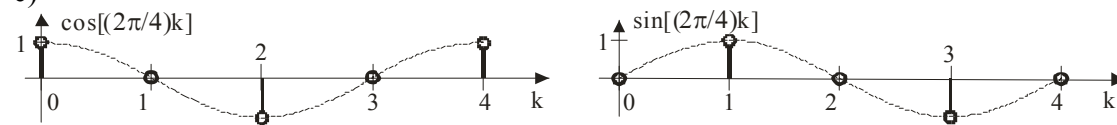
c) Načrtněte jednu periodu reálné a imaginární části tohoto signálu pro  $N = 4$  (5b).

### Řešení

$$a) f(k+N) = Ae^{j\frac{2\pi}{N}(k+N)} = Ae^{j\frac{2\pi}{N}k} e^{j\frac{2\pi}{N}N} = Ae^{j\frac{2\pi}{N}k} e^{j2\pi} = Ae^{j\frac{2\pi}{N}k} = f(k)$$

$$b) P_w = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |f(k)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left| Ae^{j\frac{2\pi}{N}k} \right|^2 = \frac{A^2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left| e^{j\frac{2\pi}{N}k} \right|^2 = \frac{A^2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 1 = \frac{A^2}{N} N = A^2$$

c)



4) Diskrétní systém je popsán svojí impulsovou charakteristikou

$$g(k) = \begin{cases} 1/3 & k = 0, 1, 2 \\ 0 & k \neq 0, 1, 2 \end{cases} \quad (20b)$$

a) Určete přechodovou charakteristiku systému a načrtněte ji pro prvních 6 hodnot. Ocejchujte osy. (4b)

b) Určete operátorový přenos systému. (3b)

c) Načrtněte rozložení pólů a nul (4b)

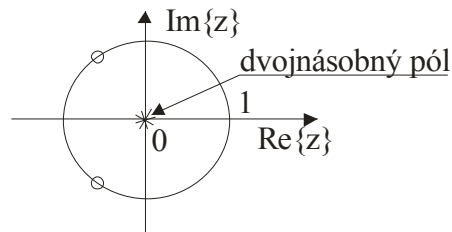
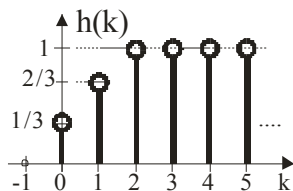
d) Napište diferenční rovnici systému. (3b)

e) Slovně popište činnost systému (3b)

f) Rozhodněte o stabilitě systému. (3b)

**Řešení:**

a)  $h(0) = g(0) = 1/3$ ,  $h(1) = g(0) + g(1) = 2/3$ ,  $h(2) = g(0) + g(1) + g(2) = 1$   
 $h(k) = 1 \quad k \geq 3$



b)  $F(z) = \mathcal{Z}\{g(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} = \frac{1}{3}z^0 + \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} = \frac{1}{3}(z^0 + z^{-1} + z^{-2}) = \frac{z^2 + z^1 + 1}{3z^2}$

c) Systém má jeden dvojnásobný pól  $z_1 = 0$  a dvě nuly, které leží na jednotkové kružnici (viz obr.)

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} \quad |n_{1,2}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

d)  $F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{3} \Rightarrow Y(z)3 = U(z)(1 + z^{-1} + z^{-2})$

$$\Rightarrow y(k) = \frac{1}{3}[u(k) + u(k-1) + u(k-2)]$$

e) Systém realizuje plovoucí průměr ze 3 hodnot.

f) Systém má jeden dvojnásobný pól  $z_1 = 0$  který leží v nule a tedy uvnitř jednotkové kružnice a proto je systém stabilní.