2008 B/KSAS 2.termín 23.1.2009	Jméno:	ID=

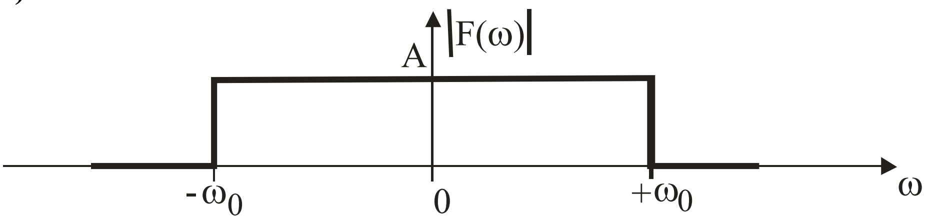
1. Je dáno spektrum spojitého signálu

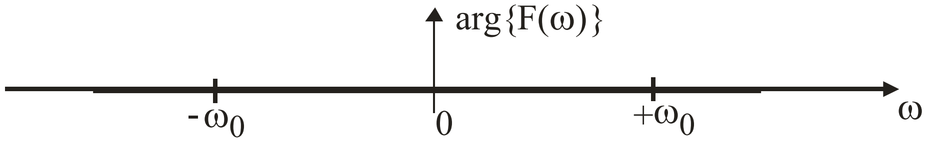
$F(\omega) = A\left[\sigma(\omega+\omega_0) - \sigma(\omega-\omega_0)\right], \quad A, \omega_0 > 0, \omega \in (-\infty, +\infty)$ **(15b)**

a) Načrtněte amplitudové a fázové spektrum. Popište osy (**2b**)
b) Určete zda je periodický, zdůvodněte. (**1b**)
c) Vypočtěte časový průběh signálu (**4b**)
d) Načrtněte časový průběh signálu (**4b**)
e) Načrtněte časový průběh signálu pro $\omega_0 \to \infty$. (**4b**) Pomůcka: $\lim\limits_{a\to\infty} \frac{\sin ax}{x} = \pi\delta(x)$

Řešení

a)





b) Jelikož spektrum signálu není diskrétní, je tento signál neperiodický.

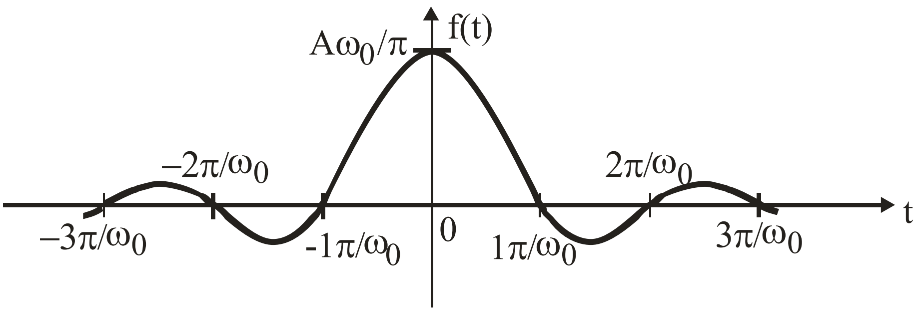
c)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{+j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} A e^{+j\omega t} d\omega = \frac{A}{2\pi}\left[\frac{e^{+j\omega t}}{jt}\right]_{-\omega_0}^{+\omega_0} = \frac{A}{\pi t}\frac{e^{+j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} = \frac{A}{\pi t}\sin\omega_0 t =$$

$$= \frac{A\omega_0}{\pi}\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t}$$

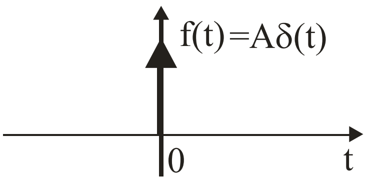
d) $f(t)\Big|_{t=0} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{A\omega_0}{\pi}\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t} = \frac{A\omega_0}{\pi}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t} = \frac{A\omega_0}{\pi}$

nulové body: $\omega_0 t = k\pi; k = 1, 2, 3, ... \quad \Rightarrow \quad t = k\pi/\omega_0$



e) Pro $\omega_0 \to \infty$ platí

$$\lim_{\omega_0\to\infty} f(t) = \lim_{\omega_0\to\infty}\frac{A\omega_0}{\pi}\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t} = \frac{A}{\pi}\lim_{\omega_0\to\infty}\frac{\sin\omega_0 t}{t} = \frac{A}{\pi}\pi\delta(t) = A\delta(t)$$



2. Na vstupu spojitého systému s nulovými počátečními podmínkami, který je popsán diferenciální rovnicí $Ty' + y = Ku$ působí signál $u(t) = \sigma(t)e^{j\omega t}, t \in (-\infty, +\infty)$. (**20b**)

a) Vypočtěte časový průběh výstupního signálu. (**10b**).

b) Diskutujte řešení (**10b**).

Řešení:

a) Pro Laplaceův obraz vstupního signálu platí $U(p) = L\{u(t)\} = \dfrac{1}{p - j\omega}$. (**1b**)

Pro operátorový přenos systému platí $F(p) = \dfrac{K}{Tp+1}$ (**1b**)

Pro Laplaceův obraz výstupního signálu platí

$$Y(p) = F(p)U(p) = \frac{K}{Tp+1}\frac{1}{p-j\omega} = \frac{A}{Tp+1} + \frac{B}{p-j\omega} = \frac{Ap - jA\omega + BTp + B}{(Tp+1)(p-j\omega)} =$$

$$= \frac{(A+BT)p + (B - jA\omega)}{(Tp+1)(p-j\omega)} \Rightarrow \begin{array}{c} A + BT = 0 \\ B - jA\omega = K \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A = -BT \\ B + jBT\omega = K \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A = \dfrac{-KT}{j\omega T + 1} \\ B = \dfrac{K}{j\omega T + 1} \end{array} \quad (\mathbf{4b})$$

Pro časový průběh výstupního signálu platí

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{A}{Tp+1} + \frac{B}{p-j\omega}\right\} = \frac{A}{T}L^{-1}\left\{\frac{1}{p+1/T}\right\} + BL^{-1}\left\{\frac{1}{p-j\omega}\right\} = \frac{A}{T}e^{-\frac{t}{T}} + Be^{j\omega t} \quad (\mathbf{2b})$$

Po dosazení za A, B obdržíme

$$y(t) = \frac{A}{T}e^{-\frac{t}{T}} + Be^{j\omega t} = \frac{-K}{j\omega T + 1}e^{-\frac{t}{T}} + \frac{K}{j\omega T + 1}e^{j\omega t} = y_1(t) + y_2(t) \quad (\mathbf{2b})$$

b) Výstupní signál má dvě složky. První složka $y_1(t) = \dfrac{K}{j\omega T + 1}e^{-\frac{t}{T}}$ představuje tlumený přechodový děj, který vzniká na výstupu systému připojením vstupního signálu $e^{j\omega t}$ v čase $t = 0$. (**5b**)

Druhá složka $y_2(t) = \dfrac{K}{j\omega T + 1}e^{j\omega t}$ reprezentuje harmonické kmitání o stejném kmitočtu jako má vstupní signál $u(t) = \sigma(t)e^{j\omega t}$, ale s jinou amplitudou, a to s amplitudou $\dfrac{K}{j\omega T + 1}$.

Velikost této amplitudy je rovna hodnotě operátorového přenosu systému pro $p = j\omega$ tj.

$F(p)\big|_{p=j\omega} = \dfrac{K}{Tp+1}\bigg|_{p=j\omega} = \dfrac{K}{j\omega T + 1}$. Tato veličina se nazývá frekvenční přenos systému. (**5b**)

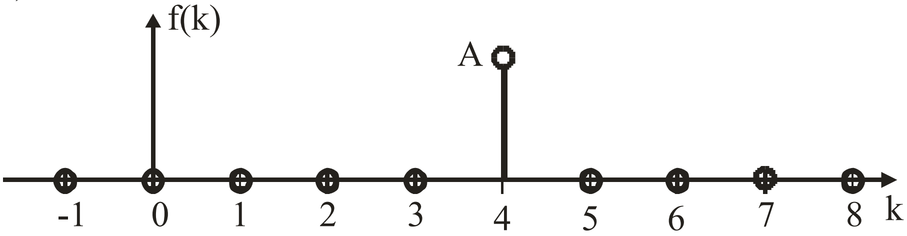
2008 B/KSAS 2.termín 23.1.2009	Jméno:	ID=

3. Je dán diskrétní signál $f\left(k\right)=\begin{cases} A\delta\left(k-N/2\right) & k=0,1,2,\dots N-1 \\ 0 & k\neq 0,1,2,\dots N-1 \end{cases}$ $\quad N=8$ (**15b**)

a) Načrtněte signál. Popište osy. (**2b**)
b) Určete zda je periodický. (**1b**)
c) Vypočtěte jeho spektrum. (**4b**)
d) Načrtněte amplitudové spektrum pro $m=0,1,\dots N-1$. Popište osy. (**4b**)
e) Načrtněte fázové spektrum pro $m=0,1,\dots N-1$. Popište osy. (**4b**)

Řešení:

a)



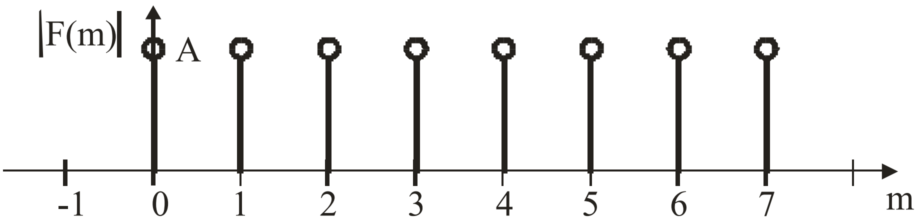
b) Signál není periodický

c)

$$F\left(m\right)=\sum_{k=0}^{N-1} f\left(k\right)e^{-jm\frac{2\pi}{N}k}=Ae^{-jm\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}}=Ae^{-jm\pi} \quad m=0,1,\dots N-1$$

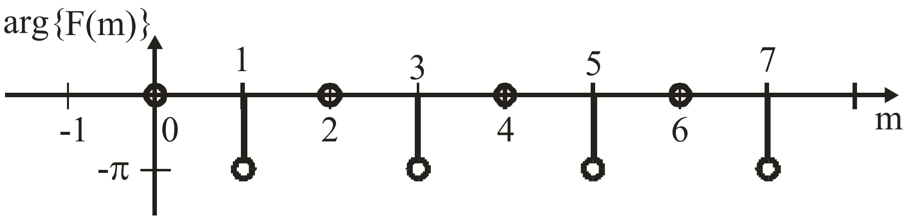
d)

$$\left|F\left(m\right)\right|=\left|Ae^{-jm\pi}\right|=A \quad m=0,1,\dots N-1$$

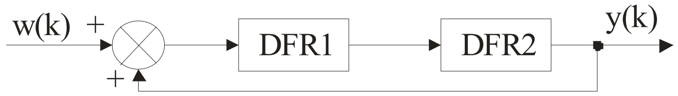


e)

$$\arg\left\{F\left(m\right)\right\}=\arg\left\{Ae^{-jm\pi}\right\}=-m\pi \quad m=0,1,\dots N-1$$



4. Diskrétní systém sestává ze dvou dílčích diskrétních systémů, které jsou popsány diferenčními rovnicemi DFR1: $y(k) = K_1 u(k-1)$, DFR2: $y(k) + y(k-1) = 0{,}5u(k)$



(20b)

a) Určete operátorové přenosy obou systémů (**2b**)
b) Načrtněte impulsní charakteristiky obou dílčích systémů pro $k = 0,1,2,3$. (**6b**)
c) Určete celkový operátorový přenos. (**2b**)
d) Určete velikost parametru K_1 tak, aby výsledný systém měl impulsní charakteristiku

$$g(k) = \begin{cases} A(0{,}5)^{k-1} & k = 1,2,\dots \\ 0 & k \le 0 \end{cases}$$ kde A je libovolné kladné číslo. (**8b**)

e) Načrtněte tuto výslednou impulsní charakteristiku pro $k = 0,1,2,3$. (**2b**)

Řešení:

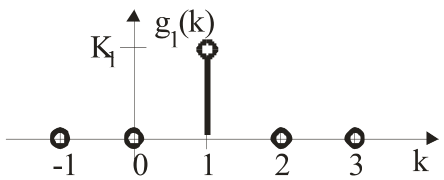
a) $F_1(z) = z^{-1}K_1 = K_1 / z$

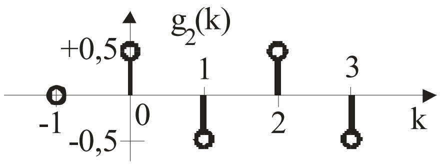
$$y(k) + y(k-1) = 0{,}5u(k) \Rightarrow Y(z) + z^{-1}Y(z) = 0{,}5U(z) \Rightarrow Y(z)\left(1+z^{-1}\right) = 0{,}5U(z)$$

$$F_2(z) = \frac{0{,}5}{1+z^{-1}} = \frac{0{,}5z}{(z+1)}$$

b) $g_1(k) = Z^{-1}\{F_1(z)\} = Z^{-1}\{z^{-1}K_1\} = K_1\delta(k-1)$

$$g_2(k) = Z^{-1}\{F_2(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{0{,}5}{1+z^{-1}}\right\} = 0{,}5Z^{-1}\left\{\frac{1}{1+z^{-1}}\right\} = \begin{cases} 0{,}5(-1)^k & k \ge 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$





c) Pro celkový přenos platí

$$F(z) = \frac{\frac{K_1}{z}\frac{0{,}5z}{(z+1)}}{1-\frac{K_1}{z}\frac{0{,}5z}{(z+1)}} = \frac{0{,}5K_1}{z+(1-0{,}5K_1)} = \frac{0{,}5K_1 z^{-1}}{1-(-1+0{,}5K_1)z^{-1}} = z^{-1}\frac{0{,}5K_1}{1-(-1+0{,}5K_1)z^{-1}}$$

Protože je

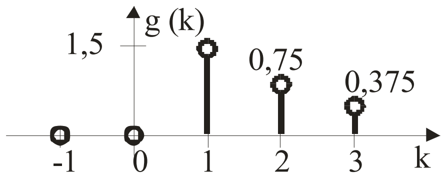
$$Z^{-1}\left\{\frac{0{,}5K_1}{1-(-1+0{,}5K_1)z^{-1}}\right\} = 0{,}5K_1 Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-(-1+0{,}5K_1)z^{-1}}\right\} = \begin{cases} 0{,}5K_1(-1+0{,}5K_1)^k & k = 0,1,2,\dots \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

platí pro impulsní charakteristiku celkového spojení obou systémů

$$g(k) = \begin{cases} 0{,}5K_1(-1+0{,}5K_1)^{k-1} & k = 1,2,\dots \\ 0 & k \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -1+0{,}5K_1 = 0{,}5 \\ A = 0{,}5K_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} K_1 = 1{,}5/0{,}5 = 3 \\ A = 1{,}5 \end{matrix}$$

e) Je tedy

$$g(k) = \begin{cases} 1{,}5(0{,}5)^{k-1} & k = 1,2,\dots \\ 0 & k \le 0 \end{cases}, \quad g(0) = 0;\ g(1) = 1{,}5;\ g(2) = 0{,}75;\ g(3) = 0{,}375;$$



Zkouška: Pro diferenční rovnici platí

$$F(z) = z^{-1}\frac{0,5K_1}{1-(-1+0,5K_1)z^{-1}} = \frac{1,5z^{-1}}{1-0,5z^{-1}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$Y(z)\left(1-0,5z^{-1}\right) = 1,5z^{-1}U(z) \quad \Rightarrow \quad y(k) = 0,5y(k-1)+1,5u(k-1)$$

Bude-li na vstupu jednotkový impuls bude výstupem systému impulsová charakteristika:

$$y(k) = 0,5y(k-1)+1,5u(k-1)$$

$$k=0 \quad y(0) = 0,5y(-1)+1,5u(-1) = 0+0 = 0$$

$$k=1 \quad y(1) = 0,5y(0)+1,5u(0) = 0+1,5 = 1,5$$

$$k=2 \quad y(2) = 0,5y(1)+1,5u(1) = 1,5/2+0 = 0,75$$

$$k=3 \quad y(3) = 0,5y(2)+1,5u(2) = 0,75/2+0 = 0,375$$