2008 B/KSAS 1.termín 16.1.2009, sk.B	Jméno:	ID=

Skupina B

1. Je dán signál $f(t)=\sigma(t)e^{-2t}, t\in(-\infty,+\infty)$ (**15b**)

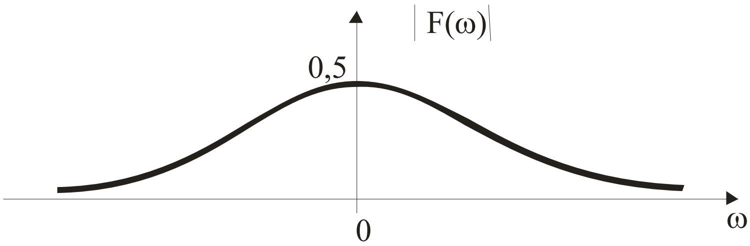
a) Určete, zda je signál periodický. (**2b**)
b) Vypočtěte jeho frekvenční spektrum. (**5b)**
c) Načrtněte amplitudové spektrum. Popište osy. (**4b**)
d) Načrtněte fázové spektrum. Popište osy. (**4b**)

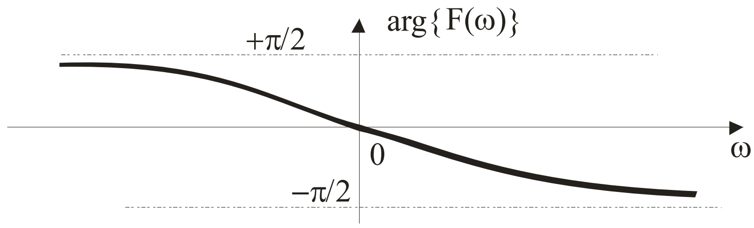
Řešení:
a) Signál není periodický.
b) Spektrum určíme jako jeho Fourierovu transformaci. Platí

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-2t}e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-(2+j\omega)t}dt=\left[\frac{e^{-(2+j\omega)t}}{-(2+j\omega)}\right]_0^{\infty}=\frac{-1}{-(2+j\omega)}(0-1)=\frac{1}{2+j\omega}=\frac{2-j\omega}{4+\omega^2}$$

c,d) Pro amplitudové a fázové spektrum platí:

$$|F(\omega)|=\left|\frac{1}{2+j\omega}\right|=\frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}} \qquad \Phi(\omega)=\arctan\frac{\frac{-\omega}{4+\omega^2}}{\frac{2}{4+\omega^2}}=-\arctan\frac{\omega}{2}$$





2008 B/KSAS 1.termín 16.1.2009, sk.B	Jméno:	ID=

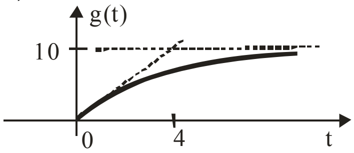
2. Dynamický systém má impulsní charakteristiku $g(t)=10\left(1-e^{-t/4}\right)\quad t\geq 0$. (**20b**)

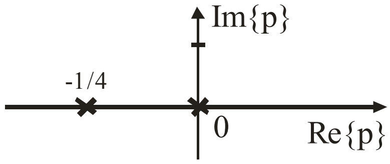
Napište:

a) Načrtněte impulsní charakteristiku. Popište osy. **(1b)**
b) Vypočtěte jeho operátorový přenos. (**4b**)
c) Nakreslete rozložení pólů a nul. (**3b**)
d) Určete jeho diferenciální rovnici (**2b**)
e) Načrtněte jeho frekvenční charakteristiku v komplexní rovině. Popište osy. **(5b)**
f) Načrtněte jeho amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Popište osy. **(5b)**

Řešení

a)





b) Pro operátorový přenos platí

$$F(p)=\mathrm{L}\{g(t)\}=\mathrm{L}\left\{10\left(1-e^{-t/4}\right)\right\}=10\mathrm{L}\{\sigma(t)\}-10\mathrm{L}\left\{e^{-t/4}\right\}=\frac{10}{p}-\frac{10}{(p+1/4)}=$$

$$=\frac{10}{p}-\frac{40}{(4p+1)}=\frac{40p+10-40p}{p(4p+1)}=\frac{10}{p(4p+1)}$$

c) Systém má dva póly, jeden v nule, druhý v -1/4 (viz obr vpravo)

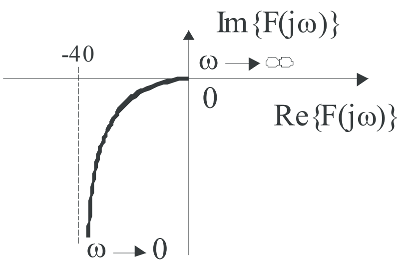
d) Pro diferenciální rovnici platí

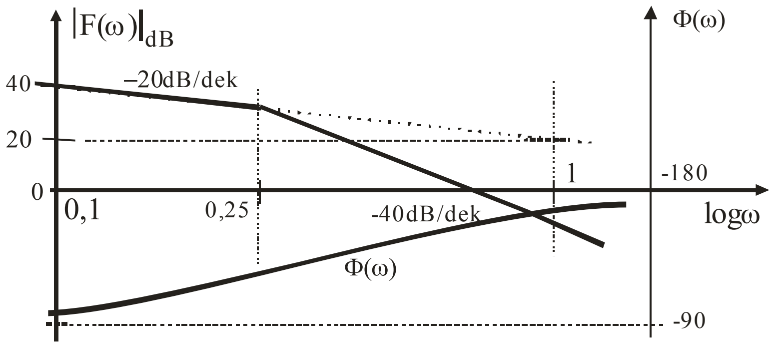
$$F(p)=\frac{10}{p(4p+1)}=\frac{Y(p)}{U(p)}\quad\Rightarrow\quad 4p^2Y(p)+pY(p)=10U(p)\quad\Rightarrow\quad 4y''+y'=10u$$

e) Pro frekvenční přenos platí

$$F(j\omega)=\frac{10}{-4\omega^2+j\omega}=\frac{10\left(-4\omega^2-j\omega\right)}{16\omega^4+\omega^2}=\frac{-40\omega^2}{16\omega^4+\omega^2}-j\frac{10\omega}{16\omega^4+\omega^2}$$

$$\lim_{\omega\to 0}\mathrm{Re}\{F(j\omega)\}=\lim_{\omega\to 0}\frac{-40\omega^2}{16\omega^4+\omega^2}=\lim_{\omega\to 0}\frac{-40}{16\omega^2+1}=-40$$





f) Pro amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku platí:

$$\left|F(j\omega)\right|_{dB}=20\log\left|\frac{10}{j\omega(4j\omega+1)}\right|=20\log\frac{10}{\omega\sqrt{16\omega^2+1}}=20\log 10-20\log\omega-20\log\sqrt{16\omega^2+1}$$

$$\Phi(\omega)=\arg\{F(j\omega)\}=-\pi/2-\arctan 4\omega$$

2008 B/KSAS 1.termín 16.1.2009, sk.B	Jméno:	ID=

3. Je dán spojitý periodický signál $f(t) = \cos \omega_0 t, \quad t \in (-\infty, +\infty)$ s periodou $P = 12$ sec. Tento signál je vzorkován a perioda vzorkování je $T_s = 2$ sec. (**15b**)

a. Lze takto získaný diskrétní signál zpětně rekonstruovat pomocí ideálního filtru typu dolní propust? Odpovězte Ano/Ne a zdůvodněte. (**5b**)

b. Je takto získaný diskrétní signál periodický? Odpovězte Ano/Ne, zdůvodněte a pokud je periodický určete jeho periodu. (**5b**)

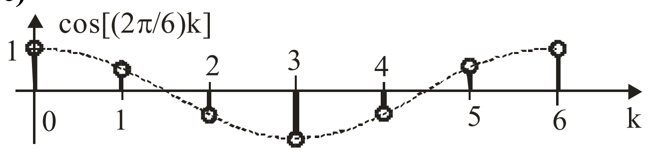
c. Načrtněte prvních 6 vzorků diskrétního signálu (**5b**).

Řešení

a) Nejvyšší kmitočet ve spektru spojitého signálu je $\omega_0 = 2\pi/12 = \pi/6$. Kmitočet vzorkování je $\omega_s = 2\pi/T_s = 2\pi/2 = \pi$. Diskrétní signál bude možno zpětně rekonstruovat, bude-li splněna podmínka Shanonova teorému $\omega_s/\omega_0 > 2$. Platí $\dfrac{\omega_s}{\omega_0} = \dfrac{\pi}{\pi/6} = 6 > 2$. Podmínka je splněna a proto lze signál rekonstruovat.

b) Vzhledem k tomu, že poměr $\omega_s/\omega_0 = 6$ je celé číslo (v jedné periodě spojitého signálu je celistvý počet vzorků) je diskrétní signál periodický s periodou $N = 6$.

c)



2008 B/KSAS 1.termín 16.1.2009, sk.B	Jméno:	ID=

4. Přechodová charakteristika diskrétního systému má tvar: $h(k)=\begin{cases}\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k & k>0\\ 0 & k\le 0\end{cases}$ **(20b)**

a) Vypočtěte impulsovou charakteristiku a načrtněte ji pro $k=0,1,2,3$. (**8b**)
b) Určete operátorový přenos systému (**8b**)
c) Nakreslete rozložení pólů a nul. (**2b**)
d) Rozhodněte o stabilitě (**1b**)
e) Napište diferenční rovnici systému (**1b**)

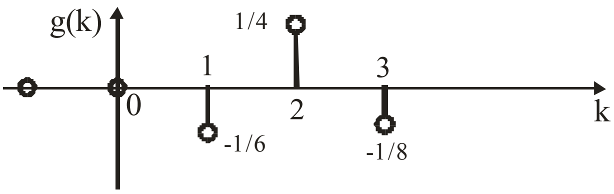
Řešení

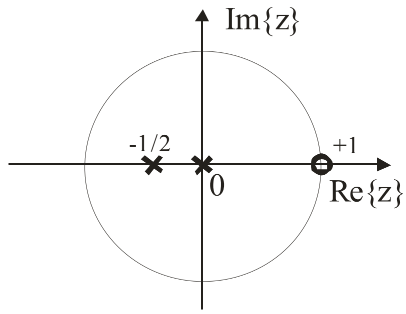
a) Platí $g(0)=h(0)-h(-1)=0;\quad g(1)=h(1)-h(0)=-1/6$ a pro $k>1$ platí

$$g(k)=h(k)-h(k-1)=\frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right]=\frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right]=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$g(0)=0;\quad g(1)=-1/6;\quad g(2)=1/4;\quad g(3)=-1/8;$





b) Pro přenos platí:

$$F(z)=\frac{z-1}{z}Z\{h(k)\}=\frac{z-1}{z}\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2z}\right)^k=\frac{z-1}{3z}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2z}\right)^k-1\right]=\frac{z-1}{3z}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2z}}-1\right]=$$

$$=\frac{z-1}{3z}\left[\frac{2z}{2z+1}-1\right]=\frac{z-1}{3z}\frac{2z-2z-1}{2z+1}=-\frac{z-1}{6z(z+0,5)}=-\frac{z^{-1}-z^{-2}}{6+3z^{-1}}$$

c) Systém má jednu nulu $n_1=1$ a dva póly $z_1=0; z_2=-0,5$ (viz obr. vpravo).
d) Póly leží uvnitř jednotkové kružnice tj. systém je stabilní
e) Pro diferenční rovnici systému platí:

$$F(z)=-\frac{z^{-1}-z^{-2}}{6+3z^{-1}}=\frac{Y(z)}{U(z)}\quad\Rightarrow\quad \begin{gathered}Y(z)\left(6+3z^{-1}\right)=-U(z)\left(z^{-1}-z^{-2}\right)\\ 6y(k)+3y(k-1)=-u(k-1)+u(k-2)\end{gathered}$$

Zkouška: na vstupu je jednotkový skok $\sigma(k)$, výstup musí být zadaná přechodová charakteristika $h(k)$

$y(k)=-1/2y(k-1)-1/6u(k-1)+1/6u(k-2)$

$k=0\quad y(0)=-1/2y(-1)-1/6u(-1)+1/6u(-2)=-0-0-0=0$

$k=1\quad y(1)=-1/2y(0)-1/6u(0)+1/6u(-1)=0-1/6=-1/6$

$k=2\quad y(2)=-1/2y(1)-1/6u(1)+1/6u(0)=+1/12-1/6+1/6=1/12$

$k=3\quad y(3)=-1/2y(2)-1/6u(2)+1/6u(1)=-1/24-1/6+1/6=-1/24$