2008 B/KSAS 1.termín 16.1.2009, sk.A	Jméno:	ID=

Skupina A

1. Je dán signál $f(t) = \sin 2\pi t - 2\cos 2{,}1\pi t$ (**15b**)

a) Určete, zda je periodický. V případě, že ano potom určete jeho základní kmitočet. (**3b**)
b) Vypočtěte koeficienty Fourierovy řady zadaného signálu. (**4b**)
c) Načrtněte amplitudové spektrum signálu. Popište osy. (**4b**)
d) Načrtněte fázové spektrum signálu. Popište osy. (**4b**)

Řešení:

a) Funkce $\sin 2\pi t = \sin \omega_1 t$ má periodu $P_1 = 2\pi/\omega_1 = 2\pi/2\pi = 1$ a funkce $\cos 2{,}1\pi t = \cos \omega_2 t$ má periodu $P_2 = 2\pi/\omega_2 = 2\pi/2{,}1\pi = 2/2{,}1$. Aby byla funkce $f(t)$ periodická musí existovat taková celá čísla n_1, n_2 aby platilo $n_1 P_1 = n_2 P_2$ tj. $P_1/P_2 = n_2/n_1$ což znamená, že poměr period musí být racionální číslo. V našem případě $\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{2/2{,}1} = \frac{2{,}1}{2} = \frac{21}{20}$ a je tedy $n_2 = 21, n_1 = 20$ a společnou (základní) periodou je číslo $P = n_1 P_1 = n_2 P_2 = 20.1 = 21.\frac{2}{2{,}1} = 20$. Základní kmitočet pak bude $\omega = 2\pi/P = 2\pi/20 = 0{,}1\pi$.

Jiné řešení: Největší společný dělitel čísel 2π a $2{,}1\pi$ je číslo $0{,}1\pi$ a proto perioda funkce $f(t)$ je $P = 2\pi/0{,}1\pi = 20$

b) Jelikož $\omega_1 = 20\omega, \omega_2 = 21\omega$ pak pro funkci $f(t)$ platí $f(t) = \sin 20\omega t - 2\cos 21\omega t$ a k nalezení spektra lze užít Eulerovy vztahy.

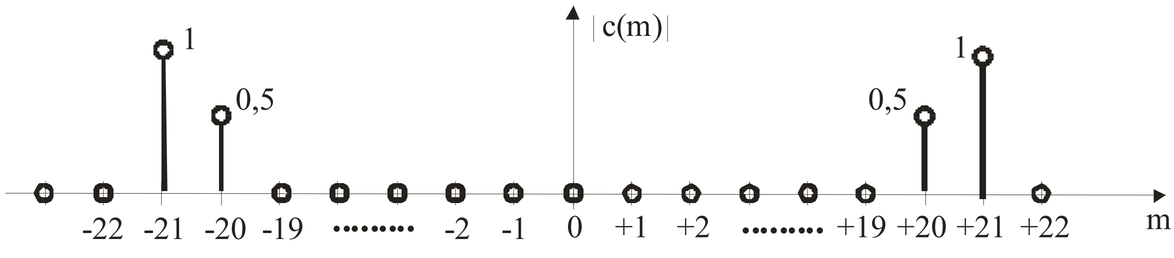
$$f(t) = \sin 20\omega t - 2\cos 21\omega t = \frac{e^{j20\omega t} - e^{-j20\omega t}}{2j} - 2\frac{e^{j21\omega t} + e^{-j21\omega t}}{2} = -1e^{-j21\omega t} + 0{,}5je^{-j20\omega t} - 0{,}5je^{j20\omega t} - 1e^{j21\omega t}$$

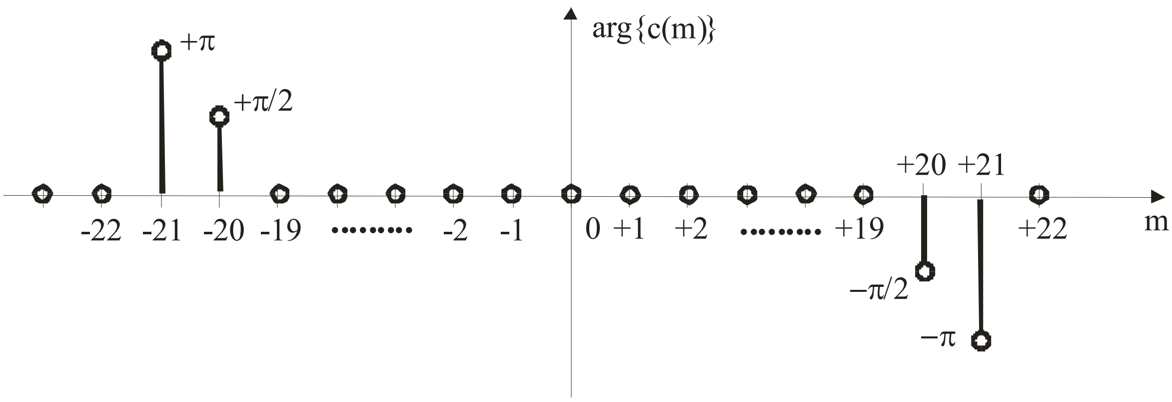
Pro koeficienty spektra tedy platí: $c_{-21} = -1 \quad c_{-20} = +0{,}5j \quad c_{+20} = -0{,}5j \quad c_{+21} = -1$

c,d) Pro jejich amplitudy a fáze platí:

$|c_{-21}| = 1 \quad |c_{-20}| = 0{,}5 \quad |c_{+20}| = 0{,}5 \quad |c_{+21}| = 1$

$\arg\{c_{-21}\} = +\pi \quad \arg\{c_{-20}\} = +\pi/2 \quad \arg\{c_{+20}\} = -\pi/2 \quad \arg\{c_{+21}\} = -\pi$





2008 B/KSAS 1.termín 16.1.2009, sk.A	Jméno:	ID=

2. Dynamický systém je popsán diferenciální rovnicí $y'' + 0,25y' = 2,5u$. (**20b**)

Napište:

a) Jeho operátorový přenos (**2b**)

b) Nakreslete rozložení pólů a nul. (**3b**)

c) Načrtněte jeho frekvenční charakteristiku v komplexní rovině. Popište osy. (**5b**)

d) Načrtněte jeho amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích. Popište osy. (**5b**)

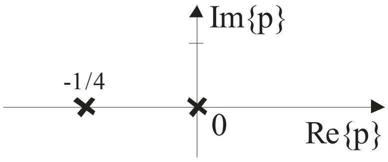
e) Vypočtěte a načrtněte jeho impulsní charakteristiku. Popište osy. (**5b**)

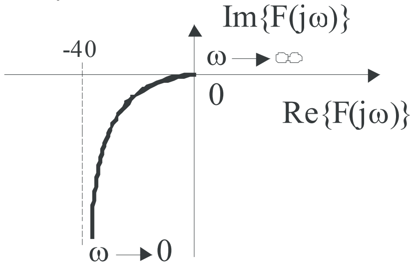
Řešení

a) Pro operátorový přenos platí

$$F(p) = \frac{2,5}{p^2 + 0,25p} = \frac{10}{p(4p+1)}$$

b) Systém má dva póly, jeden v nule, druhý v -1/4.





c) Pro frekvenční přenos platí

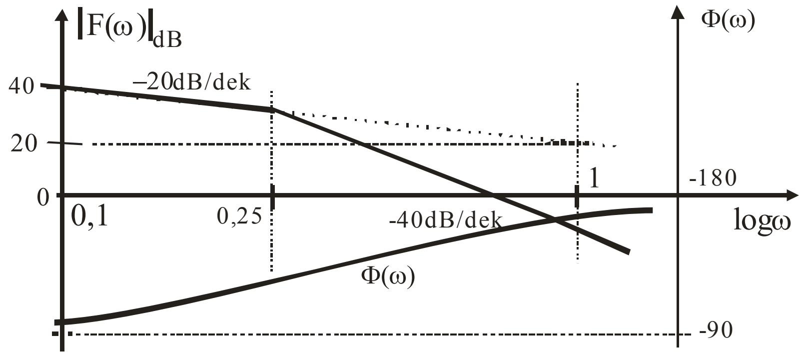
$$F(j\omega) = \frac{10}{-4\omega^2 + j\omega} = \frac{10\left(-4\omega^2 - j\omega\right)}{16\omega^4 + \omega^2} = \frac{-40\omega^2}{16\omega^4 + \omega^2} - j\frac{10\omega}{16\omega^4 + \omega^2}$$

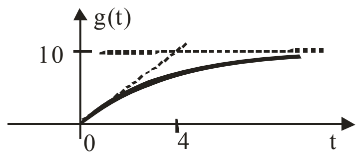
$$\lim_{\omega\to 0} \operatorname{Re}\left\{F(j\omega)\right\} = \lim_{\omega\to 0} \frac{-40\omega^2}{16\omega^4 + \omega^2} = \lim_{\omega\to 0} \frac{-40}{16\omega^2 + 1} = -40$$

d) Pro amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku platí:

$$\left|F(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\left|\frac{10}{j\omega(4j\omega+1)}\right| = 20\log\frac{10}{\omega\sqrt{16\omega^2+1}} = 20\log 10 - 20\log\omega - 20\log\sqrt{16\omega^2+1}$$

$$\arg\left\{F(j\omega)\right\} = -\pi/2 - \arctan 4\omega$$





e) Pro impulsní charakteristiku platí (po rozkladu na parciální zlomky):

$$g(t) = L^{-1}\left\{F(p)\right\} = L^{-1}\left\{\frac{10}{p(4p+1)}\right\} = 10L^{-1}\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/4}\right\} = 10\left(1 - e^{-t/4}\right) \quad t \ge 0$$

3. Je dán diskrétní signál $f(k)=\sum_{i=0}^{N-1}\delta(k-i)\quad N>0$. (**15b**)

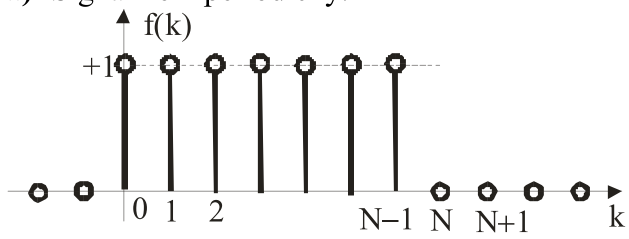
a) Rozhodněte, zda je signál periodický a načrtněte ho. Popište a ocejchujte osy. **(5b)**

b) Vypočtěte jeho spektrum (Pomůcka: $\sum_{k=0}^{N-1}q^k=\frac{1-q^N}{1-q}$) (**5b**)

c) Načrtněte amplitudové spektrum (**5b**)

Řešení:

a) Signál není periodický.



b) Pro spektrum signálu platí DFT

$$F(m)=\sum_{k=0}^{N-1}f(k)e^{-jm\frac{2\pi}{N}k}=\sum_{k=0}^{N-1}1e^{-jm\frac{2\pi}{N}k}=\sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{-jm\frac{2\pi}{N}}\right)^k=\frac{1-e^{-jm\frac{2\pi}{N}N}}{1-e^{-jm\frac{2\pi}{N}}}=\frac{1-e^{-jm2\pi}}{1-e^{-jm\frac{2\pi}{N}}}\qquad m=0,1,\ldots N-1$$

c) Hodnota spektra pro $m=0$ je neurčitý výraz typu 0/0 a proto:

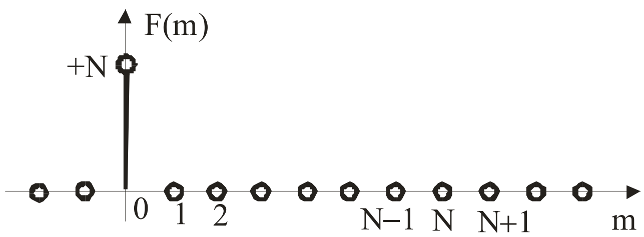
$$F(0)=\lim_{m\to 0}F(m)=\lim_{m\to 0}\frac{1-e^{-jm2\pi}}{1-e^{-jm\frac{2\pi}{N}}}=\lim_{m\to 0}\frac{j2\pi e^{-jm2\pi}}{j\frac{2\pi}{N}e^{-jm\frac{2\pi}{N}}}=N\lim_{m\to 0}\frac{e^{-jm2\pi}}{e^{-jm\frac{2\pi}{N}}}=N$$

Tuto hodnotu lze získat také přímým dosazením $m=0$ do definičního vztahu:

$$F(0)=\sum_{k=0}^{N-1}f(k)e^{-j0\frac{2\pi}{N}k}=\sum_{k=0}^{N-1}1=N\,.$$

Pro ostatní $m=1,2,\ldots N-1$ jsou hodnoty spektra nulové neboť čitatel $F(m)$ je roven $1-e^{-jm2\pi}=1-1=0$ a jmenovatel je od nuly různý. Pro spektrum tedy platí:

$$F(m)=\begin{cases}N & m=0\\ 0 & m=1,2,\ldots N-1\end{cases}$$



2008 B/KSAS 1.termín 16.1.2009, sk.A	Jméno:	ID=

4. Přechodová charakteristika diskrétního systému má tvar:

$$h(k)=\begin{cases}\left[1-(1/2)^k\right] & k>0\\ 0 & k\le 0\end{cases}$$ **20b**

a) Vypočtěte impulsovou charakteristiku a načrtněte ji pro $k=0,1,2,3$. (**8b**)
b) Určete operátorový přenos systému (**8b**)
c) Nakreslete rozložení pólů a nul. (**2b**)
d) Rozhodněte o stabilitě a zdůvodněte. (**1b**)
e) Napište diferenční rovnici systému (**1b**)

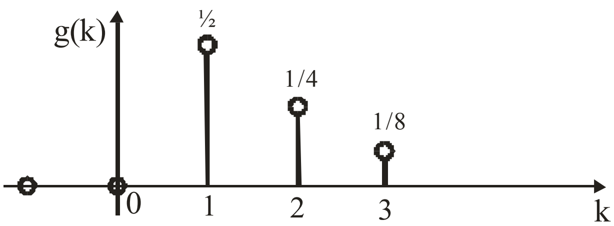
Řešení

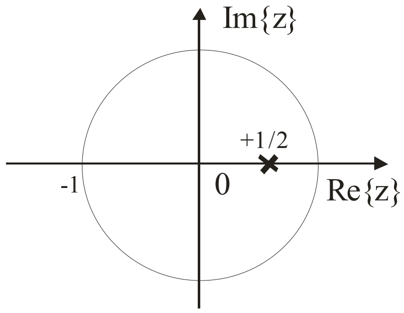
a) Platí $g(0)=h(0)-h(-1)=0-0=0;\quad g(1)=h(1)-h(0)=1/2$ a pro $k>1$ platí

$$g(k)=h(k)-h(k-1)=\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]-\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right]=\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^k-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right]=$$

$$=\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^k+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left[-\left(\frac{1}{2}\right)+1\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^k \quad\Rightarrow\quad g(k)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^k & k>0\\ 0 & k\le 0\end{cases}$$

$g(0)=0;\quad g(1)=1/2;\quad g(2)=1/4;\quad g(3)=1/8;$





b) Pro přenos platí:

$$F(z)=Z\{g(k)\}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z^{-1}}{2}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z^{-1}}{2}\right)^k-1=\frac{1}{1-\frac{z^{-1}}{2}}-1=\frac{2}{2-z^{-1}}-1=\frac{2-2+z^{-1}}{2-z^{-1}}=\frac{z^{-1}}{2-z^{-1}}=\frac{1}{2z-1}$$

c)systém nemá žádnou nulu a jeden pól $z_1=1/2$ (viz obr vpravo)
d) Póly leží uvnitř jednotkové kružnice tj. systém je stabilní
e) Pro diferenční rovnici systému platí:

$$F(z)=\frac{z^{-1}}{2-z^{-1}}=\frac{Y(z)}{U(z)}\quad\Rightarrow\quad Y(z)\left(2-z^{-1}\right)=U(z)\left(z^{-1}\right)\quad\Rightarrow\quad 2y(k)-y(k-1)=u(k-1)$$

Zkouška: na vstupu je jednotkový skok $\sigma(k)$, výstup musí být zadaná přechodová charakteristika $h(k)$

$$y(k)=1/2y(k-1)+1/2u(k-1)$$

$$k=0\quad y(0)=1/2y(-1)+1/2u(-1)=0$$

$$k=1\quad y(1)=1/2y(1-1)+1/2u(1-1)=1/2y(0)+1/2u(0)=0+1/2=1/2$$

$$k=2\quad y(2)=1/2y(2-1)+1/2u(2-1)=1/2y(1)+1/2u(1)=1/4+1/2=3/4$$

$$k=3\quad y(3)=1/2y(3-1)+1/2u(3-1)=1/2y(2)+1/2u(2)=3/8+1/2=7/8$$